

5-8. évfolyam 2006-2013

Kalmár
László

Matematika
Verseny

feladatok
és
megoldások

Tartalom

XXXVI. verseny 2006–07.	7
Feladatok	7
Megyei forduló	7
Országos döntő	9
Megoldások	13
Megyei forduló	13
Országos döntő	19
XXXVII. verseny 2007–08.	32
Feladatok	32
Megyei forduló	32
Országos döntő	34
Megoldások	38
Megyei forduló	38
Országos döntő	43
XXXVIII. verseny 2008–09.	57
Feladatok	57
Megyei forduló	57
Országos döntő	59
Megoldások	62
Megyei forduló	62
Országos döntő	68
XXXIX. verseny 2009–10.	81
Feladatok	81
Megyei forduló	81
Országos döntő	83
Megoldások	87
Megyei forduló	87
Országos döntő	92
XL. verseny 2010–11.	104
Feladatok	104
Megyei forduló	104
Országos döntő	106
Megoldások	110
Megyei forduló	110
Országos döntő	115

XLI. verseny 2011–12.	127
Feladatok	127
Megyei forduló	127
Országos döntő	129
Megoldások	132
Megyei forduló	132
Országos döntő	138
XLII. verseny 2012–13.	151
Feladatok	151
Megyei forduló	151
Országos döntő	154
Megoldások	160
Megyei forduló	160
Országos döntő	168
Eredmények	188
XXXVII. verseny 2007–08	188
XXXVIII. verseny 2008–09	190
XXXIX. verseny 2009–10	192
XL. verseny 2010–11	194
XLI. verseny 2011–12	196

URBÁN JÁNOS ÉS REIMAN ISTVÁN EMLÉKÉNEK

A feladatokat megoldotta és a megoldásokat leírta:

- Ágoston Tamás
- Bóra Eszter
- Czeller Ildikó
- Csorba Péter
- Damásdi Gábor
- Erben Péter
- Farkas Ádám László
- Frankl Nóra
- Juhász Péter
- Simon Péter

Ha bármilyen hibát találsz, küld el nekünk ✉: posa@renyi.hu

A dokumentum használata

A feladatok évenként vannak összegyűjtve. Egy éven belül először jönnek a megyei forduló, illetve az országos döntő két napjának feladatai évfolyamonként, majd pedig ugyanilyen sorrendben a megoldások. A feladatsorok minden feladatának a végén található egy  jel, amelyre kattintva egyből a megoldáshoz ugorhatunk. A megoldások végén hasonló módon található egy  ikon, melynek segítségével vissza tudunk ugrani a feladatsorba.

A dokumentum legvégén megtalálhatók az országos versenyek első 10 helyezettjei évenként és évfolyamonként megjelenítve.

A feladatokat szó szerint úgy közöljük, ahogy az a versenyen szerepelt. Előfordult olykor, hogy nem volt teljesen pontos a megfogalmazás, illetve többféleképpen is lehetett értelmezni egy feladatot. Ilyenkor azt a megoldást közöljük, amiről feltételezzük, hogy a kitűző arra gondolt.

Feladatok pontszáma

A verseny során minden feladat 7 pontot ér.

A megyei fordulóban ezért sokáig az 5. és a 6. osztályban 28, míg 7. és 8. osztályban 35 a maximális pontszám. Újabban minden évfolyamon 5 feladat van, ezért egységesen 35 a megszerezhető pontok maximális száma.

A döntőben 5. és 6. osztályban mindkét napon 4-4 feladat szerepelt 2012-ig, így a megszerezhető pontok száma 56 volt.

7. és 8. osztályban a döntő első napján 5, míg a másodikon 4 feladat szerepelt, ezért hibátlan szereplés esetén 63 pont volt szerezhető. A 2012-13-as tanév döntőjében minden évfolyamon, mindkét napon 5-5 feladat volt, így két hibátlan dolgozattal 70 pontot lehetett elérni.

A verseny története

A Kis Matematikusok Baráti Köre (KMBK) az 1960-as évek második felében alakult meg a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat (TIT) Matematikai Szakosztályának szervezésében. Az új és egyre népszerűbb „szakköri” forma hamarosan országos méreteket öltött. Folyamatosan nőtt az érdeklődés az érdekes, gondolkodtató feladatok, és a megoldásukhoz kínált új módszertani ajánlások iránt. Ez a szakköri innováció párhuzamosan fejlődött és terjedt el a komplex matematikatanítással, illetve Varga Tamáshoz kapcsolódó új matematikatanítási reformmal. E reform lényege a saját tapasztalatszerzés, felfedezésre épülő gondolkodásra nevelés, a gondolkodás örömeinek megismertetése a tanulókkal új tananyagtartalmakon és új módszerekkel. Az új matematikai nevelést új tankönyvek, munkafüzetek, feladatgyűjtemények, tanári segédkönyvek illetve a tanórai tevékenységet támogató színes és változatos eszközök sokasága segítette.

A TIT messzemenően támogatta ezt a reformot. A KMBK vezetők részére a módszerek megismertetése érdekében tanári konferenciákat, többnapos tanfolyamokat szervezett Budapesten és a vidéki városokban. Új munkafüzetek és tanári útmutatók készültek a KMBK foglalkozásokhoz. Ezeket az anyagokat és a sokrétű munkát a reform elhivatott, neves szakemberei (Demeter Éva, Pálffy Sándor, Imrecze Zoltánné, Karádi Károlyné, Abonyi Magda és Békefi Zsuzsa, valamint Kuti Gusztávné, Hasmann Károlyné, Nagy Józsefné, Terei Andrásné, Pálfalvi Józsefné, Sztrókaayné Földvári Vera, Kovács Csongorné, Csahóczi Erzsébet, Török Judit) készítették, lektorálták (Lajos Józsefné,

Pálmay Lóránt, Pogács Ferenc). A feladatgyűjteményt dr. Urbán János (1940–2012) állította össze, a lektor dr. Reiman István (1927–2012) volt. A kiadványok felelős szerkesztője is Urbán János volt. Ezek az anyagok sikeresek, népszerűek voltak, sok ezer példányban jelentek meg.

Az új anyagok alapján működő tehetséggondozó munkához, az 1971–72-es tanévtől kezdődően versenyeket is szervezett a TIT matematikából. Először csak az 5–6. osztályosok részére. A többi évfolyam számára akkoriban az Úttörő Szövetség és a Bolyai János Matematikai Társulat szervezte a matematikaversenyeket. A versenyek a tehetségkutatást, a tehetségek kiválasztását szolgálták.

Urbán János 1974-től a TIT Matematikai Választmányának titkára lett, és javaslatára a versenyt 1977-től Kalmár László (1905–1976) tiszteletére „Kis Matematikus Baráti Körök Kalmár László Versenyének” nevezték el.

Kalmár László világszerte ismert tudóstanár, az MTA rendes tagja, a matematika tudományok doktora, aki a számítástechnika, számítástudományok terén úttörő munkát végzett. Több éven át volt a TIT Matematikai Választmányának elnöke, ahol többek között a KMBK versenyek és más, tehetségeket felkutató és felkaroló rendezvények védnökeként, versenybizottságok elnökeként a matematika népszerűsítésének lelkes támogatója volt.

A Kalmár László Matematika Verseny hamarosan kiterjedt a 7–8. évfolyamokra, később a 3–4. évfolyamokra is. Az 1980-as évek végétől e verseny szervezését a TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület vette át, majd a 2012–2013-as tanévtől újra a TIT Szövetségi Iroda irányításával szerveződik ez a verseny.

A Kalmár László Matematika Verseny az 5–8. évfolyamok részére 3 forduló. Az iskolai, majd megyei forduló után az országos döntőn két feladatsort oldanak meg a versenyzők. Az iskolai fordulót követő megyei fordulón központilag készített feladatsort oldanak meg a versenyzők, és egységes, központilag készített javítási útmutató alapján történik a javítás, értékelés.

A Kalmár László Matematika Verseny megyei szintű, illetve döntős feladatsorait és a hozzájuk kapcsolódó javítási útmutatókat 1977-től 2012-ig Urbán János állította össze. Az érdekes, gondolkodtató feladatokat éveken át gyűjtötte, csiszolta, érlelte, alakította. Ebben az alkotó munkában kiváló társa, lektora volt Reiman István, aki a magyar matematikai olimpiai csapat felkészítője volt több évtizeden át. Kiváló és példás együttműködésük a tisztességet és a nyugalmat sugározta.

E két neves tanáregyenység munkája következtében kincset érő versenyfeladatok születtek az általános iskolások számára. Ezek a feladatok a tanult ismeretek rafinált alkalmazását, eredeti gondolkodást, ötletességet és kreativitást igénylő, nyílt végű különleges feladatok.

A két kitűnő szakember a verseny tisztaságának biztosításával, a gyönyörű feladatokkal, azok változatos megoldási módszereivel, a döntős feladatok megoldásainak helyszíni, szóbeli ismertetésével olyan versenykultúrát, igényességet, színvonalat, szellemiséget alakított ki a Kalmár László Matematika Versenyen, melynek ápolása a ma matematikatanárainak értékmegőrző kötelessége.

A 2012-es év döntőjének feladatait még Urbán János gyűjtötte, találta ki, de a hivatalos megoldásokat már Kiss Sándor készítette el. A 2013-as évben Kiss Sándor volt az 5–8. osztályos teljes verseny szakmai vezetője, így ő találta ki a feladatokat, ő készítette a javítási útmutatókat és felügyelte a javítást.

Reiman István és Urbán János a magyarországi matematikatanítás két, meghatározó egyénisége volt. Felkészültségükkel, szerénységükkel, a matematika és a tanítványok iránti alázatukkal mindnyájunk számára példát mutattak. Tanítottak a közoktatásban és a felsőoktatásban egyaránt. Számos könyv, tankönyv, feladatgyűjtemény, cikk őrzi emléküket. Nemzedékek egész sorával szerették meg és ismertették meg a matematikát. Példás életükkel tisztességből, kitartásból, fegyelmezettség-ből, szakmai és emberi méltóságból példamutatást adtak.

Összegyűjtött feladataikkal és azok megoldásával tisztelgünk emlékük előtt.

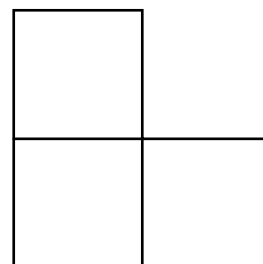
Bízunk abban, hogy az olvasók számára – legyenek azok akár milyen idősök – szép élményeket, meglepő ötleteket, hasznosítható ismereteket jelent e könyv tanulmányozása.

XXXVI. VERSENY 2006–07.

FELADATOK

Megyei forduló

1. Öt pozitív egész szám összege 20. Mit állíthatunk az öt szám szorzatáról, páros vagy páratlan szám? Állításodat indokoljad! →
2. Valamelyik évben három egymást követő hónap mindegyikében 4 vasárnap volt. Melyik három hónap lehetett ez? →
3. Adj meg 100 darab olyan pozitív egész számot, hogy a számok összege egyenlő legyen a szorzatukkal! (A számok nem feltétlenül különbözök!) →
4. Az ábrán látható L alakú alakzat három egybevágó (egyforma) négyzetből áll. Bontsuk fel ezt az alakzatot négy egybevágó (egyforma) alakzatra! →



Megyei forduló

1. Bontsd fel a következő tízjegyű számot két, egymást követő pozitív egész szám szorzatára:
1111122222. →
2. Egy kocka csúcsaihoz írjuk oda az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy, hogy a kocka bármelyik lapjának négy csúcsához írt számok összege ugyanannyi legyen, mint a szemközti lap négy csúcsához írt számok összege. →
3. Egy családban hat gyerek van, ebben az évben minden gyerek életkora prímszám. A legfiatalabb után következő öt gyerek sorra 2, 6, 8, 12, 14 évvel idősebb a legfiatalabb testvérénél. Hány éves a hat gyerek? →
4. Legfeljebb hány pontban metszhetik egymást két négyszög oldalai (a négyszögek oldalegyenesei különbözők)? És hány metszéspontja lehet egy hatszög és egy négyszög oldalainak (itt sem lehet azonos két oldalegyenes)? →

Megyei forduló

1. Mutasd meg, hogy a tízes számrendszerben felírt

1111112111111

tizenhárom jegyű szám összetett szám, azaz felírható két, 1-nél nagyobb egész szám szorzataként!



2. Az $ABCD$ négyszög téglalap, P, Q, R, S a megfelelő oldalak harmadoló pontjai. Hányad része a $PQRS$ paralelogramma területe az $ABCD$ téglalap területének?



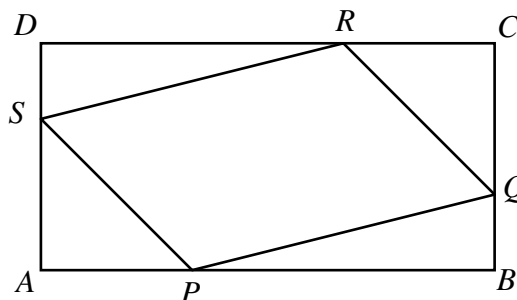
3. Legfeljebb hány olyan hónap lehet egy évben, amelyben öt péntek van?



4. Van-e olyan háromjegyű, tízes számrendszerben felírt szám, amelynek 25 pozitív osztója van?



5. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalán van az E pont. Tudjuk, hogy $AD = BD$, $BE = DE$ és $BC = EC$. Mekkora a paralelogramma szögei?



Megyei forduló

1. Melyik az a három (pozitív) prímszám, amelyeknek szorzata egyenlő összegük 7-szeresével?



2. Egy téglalapot négy téglalapra vágunk szét, ezek területe: 3, 4, 5 és x . Mennyi x értéke?



3. Igazoljuk, hogy a következő, $4012 = 2 \cdot 2006$ tagú összeg értéke $5/6$ -nál nagyobb, de $3/2$ -nél kisebb:

$$\left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} + \dots + \frac{1}{4012} \right) + \left(\frac{1}{4013} + \dots + \frac{1}{6017} + \frac{1}{6018} \right).$$



4. Az A városból B -be indul egy gyalogos, ezzel egy időben B -ből A -ba indul egy kerékpáros. Mindketten állandó sebességgel haladnak. Az indulás után 1 órával a gyalogos egyenlő távolságra lesz A -tól és a kerékpárostól. Még eltelik egy negyed óra és találkoznak. Mennyi ideig tartott a gyalogos útja A -ból B -be?



5. Az $ABCD$ konvex négyszögben a B és D csúcsnál lévő szögek 90° -osak, és $AB = BC$. Tudjuk még, hogy a B csúcsnak az AD egyenestől mért távolsága 2 egység. Számítsuk ki a négyszög területét!



3	4
x	5

Országos döntő

1. Egy apa most háromszor olyan idős, mint a fia. Ketten együtt 44 évesek. Hány éves az apa, és hány éves a fia most? Hány év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia? 
2. Az $ABCD$ négyzetet papírból vágtuk ki (az A és a C csúcs a négyzet egyik átlójának két végpontja). Jelölje E az AB oldal felezőpontját. Az EC egyenes mentén behajtjuk a papírlapot, így lesz egy kétrétegű és egy egyrétegű része a négyzetnek. Hányad része a négyzet területének az egyrétegű rész? 
3. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyeket 13-mal osztva a kapott maradék annyi, mint a szám 11-gyel való osztásakor kapott hányados, és a 11-gyel való osztáskor kapott maradék is annyi, mint a 13-mal való osztáskor kapott hányados? 
4. A következő táblázatból Andris és Béla felváltva kihúznak egy-egy számot úgy, hogy a végén csak egy szám marad. Kiderült, hogy az Andris által kihúzott számok összege háromszorosa a Béla által kihúzott számok összegének. Melyik szám maradt meg a végén a táblázatban? 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Országos döntő

1. Hány olyan, tízes számrendszerbeli páros ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek különbözők? 
2. Két pozitív egész szám összege 726. Ha a nagyobbik szám utolsó jegyét, a 0-t elhagyjuk, akkor a kisebbik számot kapjuk. Melyik ez a két szám? 
3. Rendelkezésünkre áll annyi egységkocka, amennyire szükségünk van, ezeknek a lapjai fehérek. A lehető legkevesebb kocka befestésével el akarjuk érni, hogy össze tudjunk állítani egy kívül piros, azután egy kívül zöld, majd egy kívül kék $2 \times 2 \times 2$ -es kockát. Ugyanazokat a festett egységkockákat a különböző színű kockákhoz felhasználhatjuk. Legkevesebb hány egységkockát kell befestnünk és hogyan, hogy ezt megvalósítsuk? 
4. Réka 10 évvel fiatalabb, mint az unokatestvére, Barnabás. Egy év múlva Barnabás háromszor olyan idős lesz, mint Réka. Hány éves most Réka, és hány éves Barnabás? 

Országos döntő

1. Számítsd ki a háromjegyű tízes számrendszerbeli számok számjegyeinek összegét! ➡
2. Az ABC háromszög A csúcsból induló magasságvonala az AB oldallal fele akkora szöget zár be, mint az AC oldallal. Ugyanígy a B csúcsból induló magasságvonala is fele akkora szöget zár be az AB oldallal, mint a BC oldallal. Mekkora a háromszög szögei? ➡
3. Melyek azok az a, b, c számjegyek, amelyekre teljesül, hogy $\overline{aa}, \overline{bb}, \overline{cc}$ kétjegyű tízes számrendszerbeli számok összege az a háromjegyű szám, amelynek első jegye a , a második jegye b , harmadik jegye c : $\overline{abc}$? ➡
4. Nyolc azonos méretű szabályos dobókockából egy nagyobb kockát építünk. Legfeljebb mennyi lehet a nagy kocka felszínén látható pontok száma? (A szabályos dobókockán bármely két szemközti lapon a pontok összege 7.) ➡

Országos döntő

1. Egy kocka lapjaira ráírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat (minden lapra egyet). Ezután minden élhez odaírtuk az élben találkozó két lapra írt számok összegét. Végül minden csúcs mellé írtuk az adott csúcsban találkozó három élre írt számok összegét. Mennyi lesz egy testátló két végpontjában elhelyezkedő csúcsokhoz írt számok összege? ➡
2. Számítsd ki a következő összeget:

$$1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+\dots+2001+2002-2003-2004+2005+2006-2007$$
(két pozitív előjelű tag után két negatív előjelű jön, ismét két pozitív, és így tovább). ➡
3. Egy 16 egységnégyzetből felépülő 4×4 -es négyzet bal felső egységnégyzetét kivesszük. A maradék 15 egységnégyzetből álló alakzatot bontsuk fel egyenes szakaszokkal
 (a) 5 egybevágó (egyforma) részre,
 (b) 3 egybevágó (egyforma) részre! ➡
4. Van-e olyan kétjegyű, tízes számrendszerbeli szám, ami egyenlő számjegyei szorzatával? Állítást indokold meg! ➡

Országos döntő

1. Egy számsorozat első tagja 3, második tagja 2, és a második tagtól kezdve minden tagot úgy számítunk ki, hogy a két, vele szomszédos tag szorzatát eggyel csökkentjük. Mi lesz a sorozat 111-edik tagja? Mennyi lesz a sorozat első 100 tagjának összege? →
2. A 2007-et hányféleképpen lehet előállítani legalább kettő, egymást követő páratlan szám összegeként? Írd fel az összes lehetséges előállítást! →
3. Az $ABCD$ négyzet belsejében a P pont, rajta kívül a Q pont úgy helyezkedik el, hogy CPD és BQC szabályos háromszögek (A és C a négyzet szemközti csúcsai). Igazoljuk, hogy A, P és Q egy egyenesre illeszkednek! →
4. Hány éves ebben az évben (2007-ben) az a férfi, aki az n^2 évszámmal jelölt évben lesz n éves? →
5. Adj meg 100 különböző pozitív egész számot úgy, hogy az összegük 5051 legyen! →

Országos döntő

1. Az x, y, z páratlan (pozitív) prímszámok, és

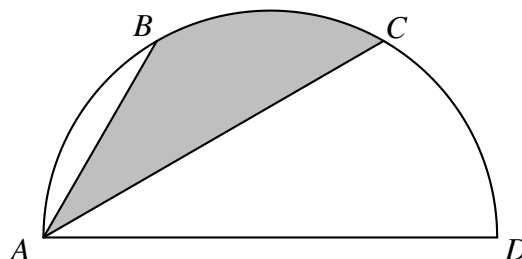
$$x + 40y + 600z = 2007.$$

Mik lehetnek x, y és z értékei? →

2. Az ABC háromszögben a BE és CF szögfelezők metszéspontja O (E az AC , F az AB oldalon van). Tudjuk, hogy $\angle AFC = 80^\circ$, és az $\angle EOC = 50^\circ$. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit! →
3. Hány olyan hatjegyű, tízes számrendszerbeli szám van, amelynek számjegyei különbözők, és a szám osztható 25-tel? →
4. Egy derékszögű háromszög oldalai hosszának szorzata kétszerese a háromszög három magassága szorzatának. Mekkora a háromszög hegyesszögei? →

Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy $3^{202} + 5 \cdot 3^{210} + 1$ összetett szám! ➔
2. Egy trapéz két párhuzamos oldala 3 és 7 egység. Az ezekkel az oldalakkal párhuzamos 6 egység hosszú szakasz a trapézt két trapézzra bontja. Mekkora a két trapéz területének aránya? ➔
3. Az $1, 2, 3, \dots, 9, 10$ számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik! ➔
4. Az ábrán látható félkör területe t . Az $ABCD$ félkört a B és C pontok három, egyenlő hosszú ívre bontják. Mennyi az ABC síkidom területe? ➔
5. A 2007 négyjegyű számhoz írjunk jobbról hozzá 3 számjegyet úgy, hogy a kapott hétjegyű tízes számrendszerbeli szám osztható legyen 7-tel, 9-cel és 11-gyel is! ➔

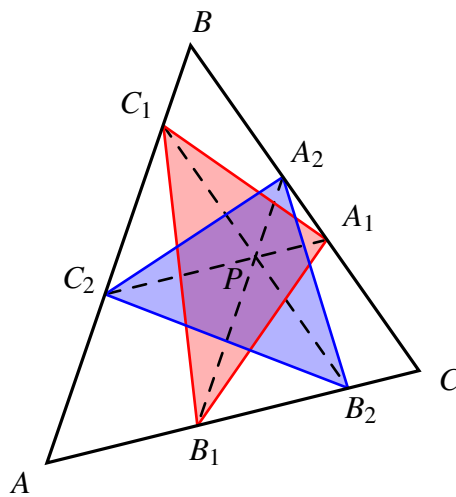


Országos döntő

1. Mely pozitív egész x -re igaz, hogy

$$x^4 + 17x^2 + 60$$
egy egész szám négyzete? ➔
2. Az ABC hegyesszögű háromszög egy P belső pontján át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. Az ábrán megjelöltük a párhuzamosok oldalakkal való metszéspontjait. Igazoljuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög területe egyenlő az $A_2B_2C_2$ háromszög területével. ➔
3. Ricsi egy unalmas délutánon leírta egy darab papírra a pozitív egész számokat 1-től kezdve valameddig. Másnap csak annyit árult el, hogy a leírt páros számok összegének és a leírt páratlan számok összegének aránya $\frac{31}{30}$. Meddig írta le a számokat Ricsi? ➔
4. Igaz-e, hogy

$$2006^{2006} - 2008$$
osztható 2007-tel? ➔



MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

1. Öt pozitív egész szám összege 20. Mit állíthatunk az öt szám szorzatáról, páros vagy páratlan szám? Állításodat indokoljad!

Számok szorzata páratlan csak úgy lehet, ha mind páratlan. Viszont öt páratlan szám összege nem lehet 20, hiszen öt páratlan szám összege páratlan lenne. Azaz a szorzat csak páros lehet. ↑

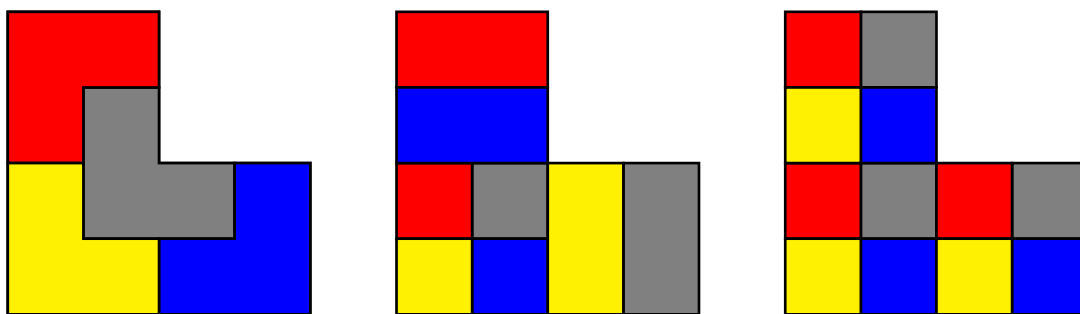
2. Valamelyik évben három egymást követő hónap mindegyikében 4 vasárnap volt. Melyik három hónap lehetett ez?

Három olyan egymást követő hónapban, ahol legalább $2 \cdot 30 + 31 = 91$ nap van, nem lehetett. Mivel $\frac{91}{7} = 13$, ez 13 hét, tehát ezekben legalább 13 vasárnap van. A három hónap olyan lehetett csak, amelyekben szerepel a február: január, február (nem szökőéves február), március, vagy február, március, április. Ez mindkét esetben létre is jöhet: ez történt 2007-ben, illetve 2010-ben. ↑

3. Adj meg 100 darab olyan pozitív egész számot, hogy a számok összege egyenlő legyen a szorzatukkal! (A számok nem feltétlenül különböznek!)

Sokféleképpen meg lehet adni 100 ilyen számot. Például: 98 darab 1, 1 darab 2 és 1 darab 100. A számok összege: $98 \cdot 1 + 2 + 100 = 200$, szorzata: $1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 100 = 200$. ↑

4. Az ábrán látható L alakú alakzat három egybevágó (egyforma) négyzetből áll. Bontsuk fel ezt az alakzatot négy egybevágó (egyforma) alakzatra!



A fenti ábrákon három lehetséges megoldás látható. ↑

Megyei forduló

1. Bontsd fel a következő tízjegyű számot két, egymást követő pozitív egész szám szorzatára:

$$1111122222.$$

Vizsgáljunk meg hasonló, de kisebb számokat:

$$12 = 3 \cdot 4$$

$$1122 = 33 \cdot 34$$

$$111222 = 333 \cdot 334$$

Ezeket ha észrevettük, akkor már nem meglepő, hogy $33333 \cdot 33334 = 1111122222$.

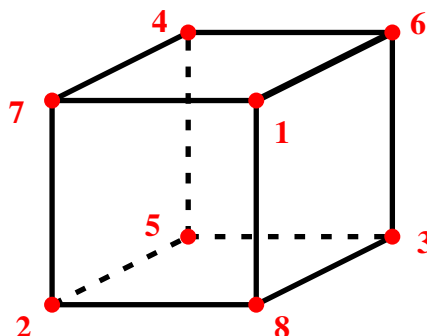


2. Egy kocka csúcsaihoz írjuk oda az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy, hogy a kocka bármelyik lapjának négy csúcsához írt számok összege ugyanannyi legyen, mint a szemközti lap négy csúcsához írt számok összege.

Vegyük először észre, hogy

$$1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36.$$

Mivel két szemköztes oldal esetén mind a 8 csúcson fog szerepelni az összegben, így minden oldalon a 4 csúcsba írt számok összege 18. Némi keresés után adódik az ábrán látható egyik lehetséges megoldás.



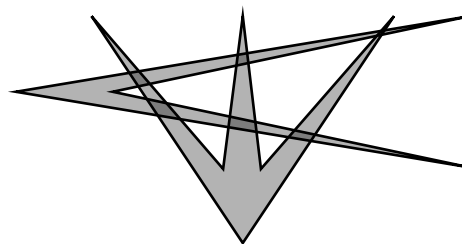
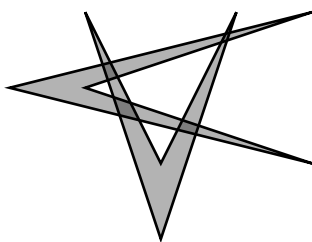
3. Egy családban hat gyerek van, ebben az évben minden gyerek életkora prímszám. A legfiatalabb után következő öt gyerek sorra 2, 6, 8, 12, 14 évvel idősebb a legfiatalabb testvérénél. Hány éves a hat gyerek?

Jelöljük a legfiatalabb gyerek életkorát p -vel. Ekkor a többiek $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+12$ és $p+14$ évesek. Vizsgáljuk meg, hogy milyen maradékot adhat p 5-tel osztva? Ha 1 maradékot ad, akkor $p+14$ osztható 5-tel. Ez nem lehet, hiszen $p+14$ is prím lenne, és ha osztható 5-tel, akkor csak 5 lehetne, de akkor $p = -9$ lenne, ami nyilván lehetetlen. Hasonlóan, ha p 2 maradékot adna, akkor $p+8$ lenne 5-tel osztható, ha 3-at, akkor $p+12$, ha 4-et, akkor pedig $p+6$. Maradt az egyetlen lehetőség, hogy p osztható 5-tel. Ekkor $p = 5$ lehetséges csak, ami meg is felel, mert 7, 11, 13, 17 és 19 is prím.



4. Legfeljebb hány pontban metszhetik egymást két négyszög oldalai (a négyszögek oldalegyenesei különbözők)? És hány metszéspontja lehet egy hatszög és egy négyszög oldalainak (itt sem lehet azonos két oldalegyenes)?

Ha minden oldalegyenes különbözők, akkor bármely két egyenesnek legfeljebb 1 közös pontja lehet. Így az első esetben legfeljebb $4 \cdot 4 = 16$, a második esetben legfeljebb $6 \cdot 4 = 24$ metszéspont keletkezhet. Az alábbi ábrákon látható, hogy ezeket meg is lehet valósítani.



Megyei forduló

1. Mutasd meg, hogy a tízes számrendszerben felírt

$$1111112111111$$

tizenhárom jegyű szám összetett szám, azaz felírható két, 1-nél nagyobb egész szám szorzataként!

Észrevehetjük, hogy hasonló, de kisebb számok esetén igaz az állítás:

$$121 = 110 + 11 = 11 \cdot 11$$

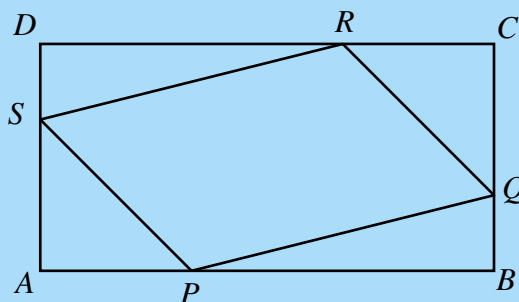
$$11211 = 11100 + 111 = 111 \cdot 101.$$

Ennek alapján

$$1111112111111 = 1111111000000 + 1111111 = 111111 \cdot 10000001.$$



2. Az $ABCD$ négyszög téglalap, P, Q, R, S a megfelelő oldalak harmadoló pontjai. Hányad része a $PQRS$ paralelogramma területe az $ABCD$ téglalap területének?



Legyen az AB oldal hossza a , a BC oldalé pedig b . Ekkor a téglalap területe ab . Az APS háromszög területe kilencede a téglalapnak, hiszen AP hossza $\frac{a}{3}$, míg AS hossza $\frac{2b}{3}$. Így a területe

$$T_{APS} = \frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3}}{2} = \frac{ab}{9}.$$

Ugyanez elmondható a CRQ , BQP és DSR háromszögekről. Így ezek a háromszögek a téglalap területének $\frac{4}{9}$ -ét teszik ki, vagyis a $PQRS$ paralelogramma területe $\frac{5}{9}$ -e a téglalap területének. 

3. Legfeljebb hány olyan hónap lehet egy évben, amelyben öt péntek van?

Minden hónapban van legalább 4 péntek, hiszen a legrövidebb hónapban is van 28 nap. 5 pénteknél több egyetlen hónapban sincs, hiszen ahhoz legalább $5 \cdot 7 + 1$ napos kéne lennie egy hónapnak,

de ilyen nincs. Tehát egy hónapban 4 vagy 5 péntek van.

Elképzelhető, hogy egy évben 5 olyan hónap van, amelyek mindegyikében 5 péntek van. Ha január 1-je péntek, és az év nem szökőév, akkor januárban, áprilisban, júliusban szeptemberben és novemberben is 5 péntek lesz.

5-nél több ilyen hónap azonban nem lehet. Ha 6 ilyen hónap lenne, akkor ez $6 \cdot 5$ hetet jelentene, és a maradék 6 hónapban is lenne legalább 4 péntek, ami $6 \cdot 4$ hét. Ez összesen 54 hét lenne, ami érinti az évet, vagyis az évben legalább $53 \cdot 7 + 1 = 372$ napnak kellene lennie. Erről azonban tudjuk, hogy nem lehetséges.

Ezekből együttesen következik, hogy legfeljebb 5 ilyen hónap lehet egy évben.



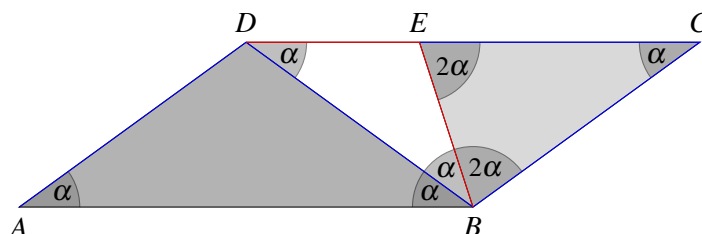
4. Van-e olyan háromjegyű, tízes számrendszerben felírt szám, amelynek 25 pozitív osztója van?

Egy szám osztóinak számát úgy kapjuk meg, hogy a prímtényezős felbontásban minden kitevőhöz egyet adva, a kapott számokat összeszorozzuk. Most ezeknek a számoknak a szorzata 25. Ezt kétféleképpen kaphattuk, vagy egy prím van a 24-edik hatványon, vagy pedig két prím szerepel a szám prímfelbontásában és az alakja $p^4 q^4$. Az első esetben a szám legalább $2^{24} = 16777216$, vagyis ilyen alakú 3-jegyű szám nem létezik. A második esetben a legkisebb lehetséges szám a $2^4 \cdot 3^4 = 1296$. Ebből következik, hogy nincs a feladat feltételeinek megfelelő szám.



5. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalán van az E pont. Tudjuk, hogy $AD = BD$, $BE = DE$ és $BC = EC$. Mekkora a paralelogramma szögei?

Tekintsük a következő ábrát.



Az azonos színű szakaszok egyenlő hosszúak a feltételekből adódóan. $AD = BC$, hiszen $ABCD$ egy paralelogramma. $AD = BD$ és $BC = EC$ miatt azonos hosszúságúak a kék szakaszok. A $BE = DE$ feltétel miatt azonos hosszúságú a két piros szakasz.

Vizsgáljuk meg a szögeket. $\angle DAB = \angle DCB$, hiszen egy paralelogramma szemkötti szögei egyenlők. Legyen ez a szög α . Ekkor $\angle DAB = \angle DBA = \alpha$, hiszen az ABD háromszög egyenlőszárú. $\angle BDC = \alpha$, hiszen a CDB háromszög is egyenlőszárú. Ebből kapjuk, hogy $\angle DBE = \alpha$, hiszen a DEB háromszög is egyenlőszárú. $\angle CEB = 2\alpha$, mivel külső szöge az EDB háromszögnek, és arról már tudjuk, hogy a megfelelő két szöge éppen α nagyságú. Mivel ECB háromszög is egyenlőszárú, így $\angle EBC = 2\alpha$. Látjuk, hogy a BC oldalon fekvő két szög összege 5α , másrészt egy paralelogramma egy oldalán fekvő szögek összege 180° . Vagyis $\alpha = 36^\circ$. Tehát a paralelogramma szögei 36° és 144° .



Megyei forduló

1. Melyik az a három (pozitív) prímszám, amelyeknek szorzata egyenlő összegük 7-szeresével?

A három prímszám legyen p, q és r . A feltétel szerint

$$pqr = 7(p + q + r).$$

Mivel a jobb oldal osztható 7-tel, ezért a bal oldal is. Ez csak úgy lehetséges, ha p, q és r közül az egyik 7. Legyen $r = 7$, így ezt kapjuk:

$$pq = p + q + 7.$$

Ebből

$$(p - 1)(q - 1) = 8$$

adódik. A 8-at kell két tényező szorzatává bontanunk úgy, hogy mindkét tényezőhöz egyet adva prímszámot kapjunk. Az $1 \cdot 8$ nem megfelelő, mivel $8 + 1 = 9$ nem prímszám, de a $2 \cdot 4$ megfelel, ugyanis 3 és 5 is prímszám. Vagyis egyedül a 3, 5 megoldás lehetséges, így a három prímszám: 3, 5 és 7. 

2. Egy téglalapot négy téglalapra vágunk szét, ezek területe: 3, 4, 5 és x . Mennyi x értéke?

3	4
x	5

Nevezzük el a négy középső szakaszt az ábrán látható módon.

Első megoldás: A négy téglalapra felírhatjuk a területük képletét:

$$a \cdot p = 3, \quad b \cdot p = 4, \quad a \cdot q = x, \quad b \cdot q = 5.$$

Vagyis $4 \cdot x = (b \cdot p) \cdot (a \cdot q) = (b \cdot q) \cdot (a \cdot p) = 5 \cdot 3 = 15$.
Innét $x = \frac{15}{4}$.

	p
a	b
	q

Második megoldás: Az a nyilván $\frac{3}{4}$ -e b -nek, hiszen a bal felső téglalap területe $\frac{3}{4}$ -e a jobb felsőnek, és a p hosszú oldaluk közös. Ebből következően a bal alsó téglalap területe $\frac{3}{4}$ -e a jobb alsónak, hiszen a q közös oldaluk. Ebből következően $x = \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$. 

3. Igazoljuk, hogy a következő, $4012 = 2 \cdot 2006$ tagú összeg értéke $5/6$ -nál nagyobb, de $3/2$ -nél kisebb:

$$\left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} + \dots + \frac{1}{4012} \right) + \left(\frac{1}{4013} + \dots + \frac{1}{6017} + \frac{1}{6018} \right).$$

Az összeg első 2006 tagját csökkenthetjük, ha mindegyik helyett a legkisebbet, vagyis $\frac{1}{4012}$ -t írunk. Ugyanígy a második 2006 tag helyett is a legkisebbet, azaz $\frac{1}{6018}$ -ot írva még inkább csökken az összeg. Vagyis

$$\left(\frac{1}{2007} + \dots + \frac{1}{4012} \right) + \left(\frac{1}{4013} + \dots + \frac{1}{6018} \right) > 2006 \cdot \frac{1}{4012} + 2006 \cdot \frac{1}{6018} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

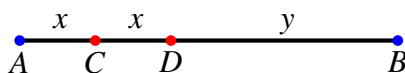
Hasonló módon az első 2006 tag mindegyike helyett nagyobbat írva és a következő 2006 tag helyett is a nagyobbat írva kapjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{2007} + \dots + \frac{1}{4012}\right) + \left(\frac{1}{4013} + \dots + \frac{1}{6018}\right) < 2006 \cdot \frac{1}{2006} + 2006 \cdot \frac{1}{4012} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ezzel mindkét állítást bizonyítottuk. 

4. Az A városból B -be indul egy gyalogos, ezzel egy időben B -ből A -ba indul egy kerékpáros. Mindketten állandó sebességgel haladnak. Az indulás után 1 órával a gyalogos egyenlő távolságra lesz A -tól és a kerékpárostól. Még eltelik egy negyed óra és találkoznak. Mennyi ideig tartott a gyalogos útja A -ból B -be?

Készítsünk ábrát. A gyalogos A -ból C -be, a kerékpáros B -ből D -be ér 1 óra alatt.



A C és D közti x kilométer távolságot ketten $1/4$ óra alatt teszik meg, tehát

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = x.$$

Ebből kapjuk, hogy $y = 3x$, vagyis, hogy a kerékpáros 3-szor gyorsabb a gyalogosnál. A találkozási pontig a gyalogos $1\frac{1}{4}$ órát haladt, és mivel B -ből ennyi idő alatt ért oda a kerékpáros, ezért a gyalogosnak még 3-szor ennyi ideig fog tartani eljutni B -be. Vagyis összesen

$$1\frac{1}{4} + 3 \cdot 1\frac{1}{4} = 5$$

órára lesz szüksége. 

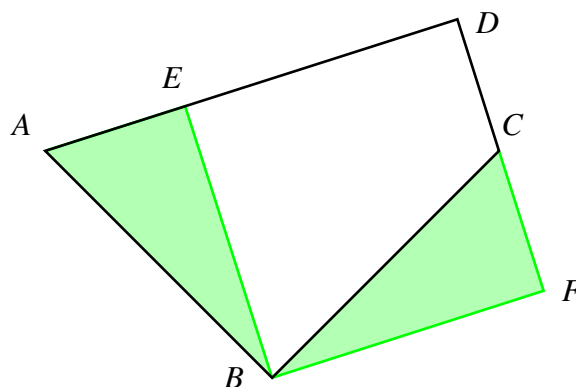
5. Az $ABCD$ konvex négyszögben a B és D csúcsnál lévő szögek 90° -osak, és $AB = BC$. Tudjuk még, hogy a B csúcsnak az AD egyenesétől mért távolsága 2 egység. Számítsuk ki a négyszög területét!

Használjuk az alábbi ábra jelöléseit, vagyis legyen E a B csúcs merőleges vetülete az AD oldalon.

Forgassuk el az AEB háromszöget a B csúcs körül 90° -kal. Mivel $\angle ABC = 90^\circ$ és $AB = BC$, ezért az AB szakasz elforgatottja a CB szakasz lesz. Legyen az E elforgatás utáni képe F . Az elforgatás miatt $\angle BFC = 90^\circ$. Mivel BE merőleges AD -re, ezért a 90° -os elforgatás után a képe párhuzamos lesz AD -vel. A $\angle DCF = 180^\circ$, hiszen

$$\angle DCF = \angle BCD + \angle BCF = \angle BAD + \angle BCF = 180^\circ.$$

Ez azért igaz, mert az $ABCD$ négyszögben van két derékszög, így a maradék két csúcsnál lévő szög összege 180° . Tudjuk azt is, hogy $BE = 2$, illetve $BE = BF$. Ebből következik, hogy $BEDF$ négyzet, aminek az oldala 2 egység. Viszont $ABCD$ területe megegyezik $BEDF$ területével, vagyis $T_{ABCD} = 4$. 

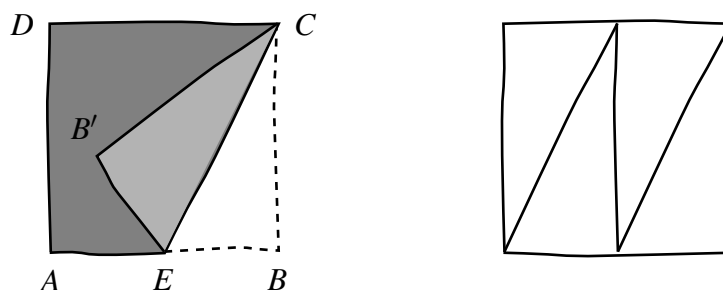


Országos döntő

1. Egy apa most háromszor olyan idős, mint a fia. Ketten együtt 44 évesek. Hány éves az apa, és hány éves a fia most? Hány év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia?

Jelölje a az apa, és f a fia életkorát. A feladat szerint $a = 3f$, és $a + f = 44$. Ebből $4f = 44$, azaz $f = 11$, tehát az apa 33 éves, fia 11 éves. n év múlva az apa $33 + n$, a fia $11 + n$ éves lesz. Azt szeretnénk, hogy $33 + n = 2 \cdot (11 + n)$ teljesüljön, azaz $33 + n = 22 + 2n$, amiből következik, hogy $n = 11$. Tehát 11 év múlva lesz az apa kétszer annyi idős, mint a fia. 

2. Az $ABCD$ négyzetet papírból vágtuk ki (az A és a C csúcs a négyzet egyik átlójának két végpontja). Jelölje E az AB oldal felezőpontját. Az EC egyenes mentén behajtuk a papírlapot, így lesz egy kétrétegű és egy egyrétegű része a négyzetnek. Hányad része a négyzet területének az egyrétegű rész?



A hajtás után a B csúcs a B' csúcsba kerül, mint az ábrán. Az egyrétegű rész területét megkaphatjuk, ha az $ABCD$ négyzet területéből kivonjuk a EBC és $EB'C$ háromszögek területét. A hajtás miatt az EBC és $EB'C$ háromszögek területe egyenlő. Az EBC háromszög 4 egybevágó példánya (ld. ábra) lefedi az $ABCD$ négyzetet. Tehát az $ABCD$ négyzet területének a negyede az EBC háromszög területe. Az $ABCD$ négyzet területének a fele az EBC és $EB'C$ háromszögek területének az összege. Tehát az egyrétegű rész területe a négyzet területének a fele. 

3. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyeket 13-mal osztva a kapott maradék annyi, mint a szám 11-gyel való osztásakor kapott hányados, és a 11-gyel való osztáskor kapott maradék is annyi, mint a 13-mal való osztáskor kapott hányados?

Legyen az n keresett szám 13-as osztási maradéka b , a hányados a . Ekkor $n = 13 \cdot a + b$. Hasonlóan $n = 11 \cdot x + y$. A feladat szerint $a = y$ és $b = x$, azaz $13 \cdot a + b = 11 \cdot b + a$, ahonnan $12 \cdot a = 10 \cdot b$, tehát $6 \cdot a = 5 \cdot b$. a és b egész számok, minden megoldás az $a = 5$ és $b = 6$ egy többszöröse. Ha $a = 0$ és $b = 0$ akkor $n = 0$, ami nem kétjegyű. Ha $a = 5$ és $b = 6$ akkor $n = 71$. Ha $a = 10$ és $b = 12$ akkor már $n > 100$. Tehát egy ilyen kétjegyű szám van, a 71. 

4. A következő táblázatból Andris és Béla felváltva kihúznak egy-egy számot úgy, hogy a végén csak egy szám marad. Kiderült, hogy az Andris által kihúzott számok összege háromszorosa a Béla által kihúzott számok összegének. Melyik szám maradt meg a végén a táblázatban?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Legyen a megmaradt szám m , és x a Béla által kihúzott számok összege. Ekkor az Andris által kihúzott számok összege $3x$, azaz az összes kihúzott szám összege $4x$. A táblázatban szereplő összes szám összege $1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Tehát $45 = 4x + m$. Ha $x \geq 12$, akkor $4x \geq 48$, m nem lehetne pozitív. Ha $x = 11$, akkor $m = 1$. Viszont ekkor a Béla által kihúzott számok összege legalább $2 + 3 + 4 + 5 = 14 > 11$, ami nem lehet.

Ha $x = 10$, akkor $m = 5$, ami lehet. Ekkor a Béla által kihúzott számok összege legalább $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, tehát az is kiderült, hogy ki melyik számot húzta ki. $x \leq 9$ nem lehet, mert a Béla által kihúzott számok összege legalább $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
A végén a táblázatban az ötös szám maradt.



Országos döntő

1. Hány olyan, tízes számrendszerbeli páros ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek különbözők?

Mivel a szám páros, így az utolsó jegye is páros. Ha az utolsó jegy a 0, akkor az első jegy 9 féle lehet, a második jegy a maradék 8 számjegy közül választható ki. A harmadik jegyre 7, a negyedikre 6 lehetőségünk marad. Így 0-ra végződő különböző jegyű ötjegyű számból $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ van.

Ha az utolsó jegy 2, 4, 6 vagy 8, akkor az első jegy 8 féle lehet, mert nem lehet sem 0, sem az utolsó jegy. A második jegy a maradék 8 számjegy közül választható ki (ez már lehet 0 is). A harmadik jegyre 7, a negyedikre 6 lehetőségünk marad. Így most $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 10752$ lehetőség van.
Tehát összesen $3024 + 10752 = 13776$ ilyen szám van.



2. Két pozitív egész szám összege 726. Ha a nagyobbik szám utolsó jegyét, a 0-t elhagyjuk, akkor a kisebbik számot kapjuk. Melyik ez a két szám?

A nagyobb szám kisebb mint 726, tehát legfeljebb háromjegyű. Kétjegyű nem lehet, mert akkor az összeg nem érheti el a 726-t. A nagyobb szám legyen $\overline{ab0}$, ahol a és b számjegyek. Ekkor a kisebbik szám $\overline{ab}$ alakú. Mivel az összegük 726, így $b = 6$. A tízes helyiértéken 2-nek kell állnia, azaz $a = 6$. A két szám tehát a 66 és a 660.



3. Rendelkezésünkre áll annyi egységkocka, amennyire szükségünk van, ezeknek a lapjai fehérek. A lehető legkevesebb kocka befestésével el akarjuk érni, hogy össze tudjunk állítani egy kívül piros, azután egy kívül zöld, majd egy kívül kék $2 \times 2 \times 2$ -es kockát. Ugyanazokat a festett egységkockákat a különböző színű kockákhoz felhasználhatjuk. Legkevesebb hány egységkockát kell befestenünk és hogyan, hogy ezt megvalósítsuk?

Egy $2 \times 2 \times 2$ -es kockának a felületén $6 \cdot 4 = 24$ egységkocka lap látható. A három különböző színű nagy kockához összesen $3 \cdot 24 = 72$ egységkocka lap kell. Mivel a kockának 6 lapja van, így legalább $\frac{72}{6} = 12$ egységkocka kell.

12 kis kockával meg is valósítható a feladat. Egy kis kocka egy csúcsa három lappal szomszédos. 12 olyan kockát veszünk, aminél egy csúccsal szomszédos 3 lap egyszínű, és a maradék három lap is egyszínű. Egy ilyen kockát ez a két szín meghatározza. A 12 kockából legyen 4 piros-kék, 4 piros-zöld és 4 zöld-kék. Ekkor például a piros nagy kockát a 8 félig piros kiskockából rakhatjuk össze. A nagy kocka minden csúcánál látható 3 piros lap egy kiskocka három piros lapja.



4. Réka 10 évvel fiatalabb, mint az unokatestvére, Barnabás. Egy év múlva Barnabás háromszor olyan idős lesz, mint Réka. Hány éves most Réka, és hány éves Barnabás?

Legyen Réka életkora r és Barnabás életkora b . A feladat szerint $r + 10 = b$. Egy év múlva pedig $3(r + 1) = b + 1$ fog teljesülni. Ebből $3(r + 1) = r + 10 + 1$, azaz $3r + 3 = r + 11$, $2r = 8$, $r = 4$. Tehát Réka most 4 éves, Barnabás pedig 14 éves.



Országos döntő

1. Számítsd ki a háromjegyű tízes számrendszerbeli számok számjegyeinek összegét!

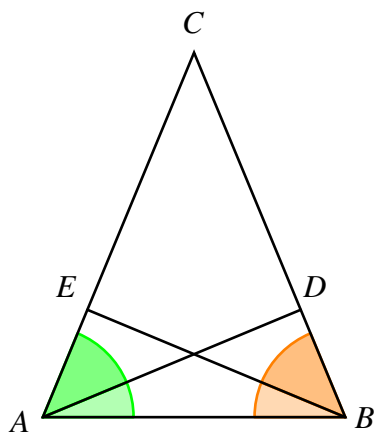
Első megoldás: Párokba rendezzük a számokat:

$$\{100, 999\}, \{101, 998\}, \{102, 997\}, \dots, \{549, 550\}.$$

Minden párban a számjegyek összege 28, és mivel 450 pár van, a háromjegyű számok számjegyeinek összege $450 \cdot 28 = 12600$.

Második megoldás: Összeszámolhatjuk helyiértékenként is. Nézzük meg, hogy például az 5-ös számjegy hányszor fog szerepelni az egyes vagy a százasként. Az első számjegy $10 \cdot 10 = 100$ -szor lesz öt. Az utolsó számjegy $9 \cdot 10 = 90$ -szer lesz öt. Ebből az összegre $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot 100 + (0 + 1 + \dots + 9) \cdot 90 + (0 + 1 + \dots + 9) \cdot 90 = 12600$ adódik. 

2. Az ABC háromszög A csúcsból induló magasságvonala az AB oldallal fele akkora szöget zár be, mint az AC oldallal. Ugyanígy a B csúcsból induló magasságvonal is fele akkora szöget zár be az AB oldallal, mint a BC oldallal. Mekkora a háromszög szögei?



Legyen D az A -ból induló, E pedig a B -ből induló magasságvonal talppontja a szemközti oldalon. Illetve jelöljük a DAB szöget α -val, az ABE szöget pedig β -val. Ekkor $CAD = 2\alpha$ és $CBE = 2\beta$. Tekintve az ABE és ABD derékszögű háromszögeket, azt kapjuk, hogy

$$3\alpha + \beta = 90^\circ$$

és $3\beta + \alpha = 90^\circ$.

Összeadva ezeket: $4\alpha + 4\beta = 180^\circ$, amiből

$$\alpha + \beta = 45^\circ.$$

Ha ezt levonjuk a két eredeti egyenlethől, akkor $2\alpha = 45^\circ$ és $2\beta = 45^\circ$. Vagyis

$$\alpha = \beta = 22,5^\circ,$$

és így a háromszög szögei: $67,5^\circ$; $67,5^\circ$; 45° . 

3. Melyek azok az a, b, c számjegyek, amelyekre teljesül, hogy $\overline{aa}, \overline{bb}, \overline{cc}$ kétjegyű tízes számrendszerbeli számok összege az a háromjegyű szám, amelynek első jegye a , a második jegye b , harmadik jegye c : $\overline{abc}$?

Három kétjegyű szám összege kevesebb 300-nál, ezért a csak 1 vagy 2 lehet. Ha $a = 2$, akkor a 3 szám összege csak úgy lehet legalább 200, ha a számok 22, 88, 99, vagy 22, 99, 88 vagy pedig 22, 99, 99. De egyik esetben sem lesz az összeg rendre 289, 298 vagy 299. Így tehát $a = 1$. Összeadva a 3 számot

$$\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{abc},$$

az összeg c -re végződik. Ebből következik, hogy $a + b = 10$, hiszen b és c is számjegyek. Mivel $a = 1$ azt kapjuk, hogy $b = 9$, azaz a fenti egyenlet:

$$11 + 99 + \overline{cc} = \overline{19c}.$$

Azaz $110 + 10c + c = 190 + c$, innét $c = 8$. 

4. Nyolc azonos méretű szabályos dobókockából egy nagyobb kockát építünk. Legfeljebb mennyi lehet a nagy kocka felszínén látható pontok száma? (A szabályos dobókockán bármely két szemközti lapon a pontok összege 7.)

Minden kis kocka 3 oldala lesz a nagy kocka valamelyik oldalának része. Egy kis kocka akkor adja a legtöbb pontot, ha a 4, 5 és 6 oldala is kívül van. Ez minden kockánál elérhető, hiszen ezek páronként szomszédos oldalak. Így a lehető legtöbb pont a nagy kocka felszínén:

$$8 \cdot (4 + 5 + 6) = 120.$$



Országos döntő

1. Egy kocka lapjaira ráírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat (minden lapra egyet). Ezután minden élhez odaírtuk az élben találkozó két lapra írt számok összegét. Végül minden csúcs mellé írtuk az adott csúcsban találkozó három élre írt számok összegét. Mennyi lesz egy testátló két végpontjában elhelyezkedő csúcsokhoz írt számok összege?

Egy testátló két átellenes pontjában 3-3 él fut össze, és ezek az élek minden oldallal pontosan kétszer szomszédosak. Vagyis minden oldalra írt számot pontosan kétszer fogunk valahol számolni, mire a testátló valamelyik csúcsában lévő számban megjelenik. Így a keresett összeg:

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42.$$



2. Számítsd ki a következő összeget:

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots + 2002 - 2003 - 2004 + 2005 + 2006 - 2007$$

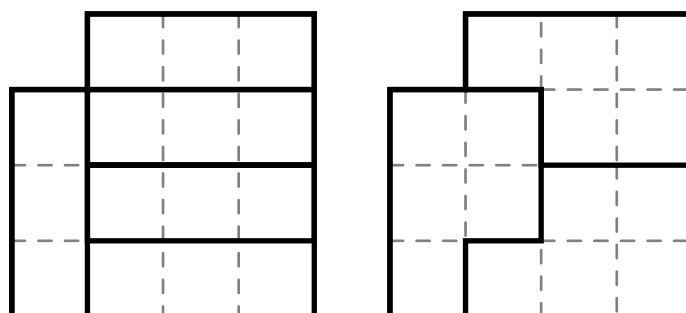
(két pozitív előjelű tag után két negatív előjelű jön, ismét két pozitív, és így tovább).

Vegyük észre, hogy $2 - 3 - 4 + 5 = 0$, majd $6 - 7 - 8 + 9 = 0$. Ez folytatódik egészen addig, hogy $2002 - 2003 - 2004 + 2005 = 0$. Vagyis a keresett összeg megegyezik az $1 + 2006 - 2007$ összeggel, ami 0.



3. Egy 16 egységnégyzetből felépülő 4×4 -es négyzet bal felső egységnégyzetét kivesszük. A megmaradó 15 egységnégyzetből álló alakzatot bontsuk fel egyenes szakaszokkal

- (a) 5 egybevágó (egyforma) részre,
(b) 3 egybevágó (egyforma) részre!



4. Van-e olyan kétjegyű, tízes számrendszerbeli szám, ami egyenlő számjegyei szorzatával? Állításodat indokoljad meg!

Nincs ilyen szám. Ha a szám első számjegye a , akkor egy olyan kétjegyű szám, ami a -val kezdődik, legalább $10a$. Viszont a másik számjegy legfeljebb 9, így a két számjegy szorzata legfeljebb $9a$. Mivel a legalább 1, ezért nem lehet a szám egyszerre legalább $10a$ és legfeljebb $9a$. 

Országos döntő

1. Egy számsorozat első tagja 3, második tagja 2, és a második tagtól kezdve minden tagot úgy számítunk ki, hogy a két, vele szomszédos tag szorzatát eggyel csökkentjük. Mi lesz a sorozat 111-edik tagja? Mennyi lesz a sorozat első 100 tagjának összege?

Ha n pozitív egész, és a sorozat elemeit rendre $a_1, a_2, a_3, \dots$ -mal jelöljük, akkor

$$a_{n+1} = a_n a_{n+2} - 1$$

a feltétel, azaz $a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$, ha $a_n \neq 0$, vagyis ekkor a sorozat elemeit az előző 2 elemből tudjuk egyértelműen meghatározni.

Ezzel a képlettel kiszámolva az első néhány tagot: 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, ... adódik. Itt a 3, 2 újra megjelenik mint egymás utáni két elem, vagyis innentől kezdve a sorozat ugyanaz, mint az elejétől kezdve, tehát végig a 3, 2, 1, 1, 2 számsorozat ismétlődik.

Ebből rögtön látszik, hogy $a_{111} = a_1 = 3$. Az első 100 tagban pedig ez az 5 hosszú periódus pontosan $\frac{100}{5} = 20$ -szor szerepel, vagyis az első 100 tag összege

$$20 \cdot (3 + 2 + 1 + 1 + 2) = 180. \quad \text{↑}$$

2. A 2007-et hányféleképpen lehet előállítani legalább kettő, egymást követő páratlan szám összegeként? Írd fel az összes lehetséges előállítást!

Legyen egy ilyen előállítás az

$$n + (n+2) + (n+4) + \dots + (n+2k) = 2007.$$

Ekkor
$$\frac{(n + (n+2k))(k+1)}{2} = (n+k)(k+1) = 2007,$$

ahol k pozitív egész, és n egész. A 2007 prímtényezősz felbontása $3^2 \cdot 223$, és $k+1 \geq 2$ a 2007 pozitív osztója, így a szóba jövő lehetőségek $k+1$ értékére 3, $3^2 = 9$, 223, $3 \cdot 223 = 669$, $3^2 \cdot 223 = 2007$, azaz k lehet 2, 8, 222, 668 vagy 2006. Ezek mindegyikére $n+k = \frac{2007}{k+1}$, azaz $n = \frac{2007}{k+1} - k$ egyértelműen meghatározott egész szám, hiszen $k+1$ a 2007 osztója. Így ezen értékek mindegyikéhez pontosan egy felbontás tartozik, tehát összesen 5-féle előállítás lehetséges.

Ezek az előállítások:

$$2007 = 667 + 669 + 671$$

$$2007 = 215 + 217 + \dots + 231$$

$$2007 = -213 - 211 - \dots + 231$$

$$2007 = -665 - 663 - \dots + 671$$

$$2007 = -2005 - 2003 - \dots + 2007. \quad \text{↑}$$

3. Az $ABCD$ négyzet belsejében a P pont, rajta kívül a Q pont úgy helyezkedik el, hogy CPD és BQC szabályos háromszögek (A és C a négyzet szemközti csúcsai). Igazoljuk, hogy A, P és Q egy egyenesre illeszkednek!

A szabályos háromszögek és a négyzet oldalainak egyenlősége miatt $\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DP}$, valamint $\overline{CQ} = \overline{CB} = \overline{CP}$, így a PDA és a PCQ háromszögek egyenlőszárúak. Emellett a szabályos háromszögek miatt $\angle CDP = \angle DCP = \angle BCQ = 60^\circ$, így

$$\angle PDA = \angle CDA - \angle CDP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

valamint $\angle PCQ = \angle PCB + \angle BCQ = (\angle DCB - \angle DCP) + \angle BCQ = (90^\circ - 60^\circ) + 60^\circ = 90^\circ$.

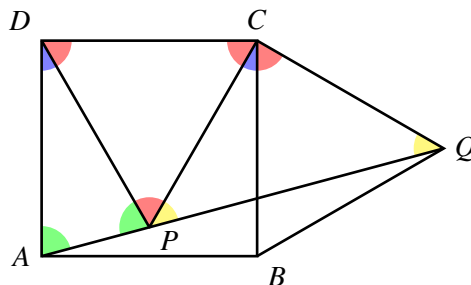
Ezekből rögtön adódik, hogy

$$\angle APD = \angle PAD = \frac{180^\circ - \angle PDA}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

valamint

$$\angle CPQ = \angle CQP = \frac{180^\circ - \angle PCQ}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Így, mivel a CPD háromszög szabályos, $\angle APQ = \angle APD + \angle DPC + \angle CPQ = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$. Tehát az A, P és Q pontok valóban egy egyenesen vannak. 



4. Hány éves ebben az évben (2007-ben) az a férfi, aki az n^2 évszámmal jelölt évben lesz n éves?

A születési év $n^2 - n = n(n-1)$ kell, hogy legyen. Ez $n = 0$ vagy 1 esetén 0 , ha pedig $m > n \geq 2$, akkor $m(m-1) > n(n-1)$, hiszen $m, n, m-1$ és $n-1$ is pozitívak, és $m > n, m-1 > n-1$. Tehát $n \geq 2$ -re az $n^2 - n$ értékek sorozata szigorúan monoton nő.

A 0 mint születési év nem jön szóba, így $n \geq 2$. Az $n = 43, 44, 45, 46$ értékekre $n(n-1) = 1806, 1892, 1980, 2070$ értékek adódnak. Ebből az 1806 nem jön szóba mint születési év, föltéve, hogy az életkor nem lehet 120 évnél nagyobb, és a 2070 sem. 43 -nál kisebb, illetve 46 -nál nagyobb n -ekre a szigorú monotonitás miatt ezeknél kisebb, illetve nagyobb értékeket kapnánk a születési évre, így ezek sem lehetségesek. Tehát csakis $n = 44$ vagy $n = 45$ jöhet szóba. Az előbbi esetben $n = 44$ éves $1892 + 44 = 1936$ -ban lenne az ember, ami már 2007 előtt volt. Így csak $n = 45$ marad. Ekkor pedig $1980 + 45 = 2025$ -ben lesz 45 éves, ami megfelel. Tehát most $2007 - 1980 = 27$ éves. 

5. Adj meg 100 különböző pozitív egész számot úgy, hogy az összegük 5051 legyen!

Vegyük észre, hogy $1 + 2 + \dots + 100 = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050$.

Ha a kérdéses 100 pozitív egész $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}$, akkor $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{100} \geq 100$. Mivel egészekről van szó, ezért ha valahol nem áll egyenlőség, azaz $a_i > i$, akkor $a_i \geq i+1$. És ha $a_i \geq i+1$, akkor $a_{i+1} > a_i$, vagyis $a_{i+1} \geq i+2$, és így tovább, $a_{100} \geq 101$. Itt

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 5051 = 5050 + 1,$$

így pontosan egy i -re nem állhat csak egyenlőség, és ott is $a_i = i+1$ kell. Tehát ez az i mindenképpen a 100 , vagyis a keresett számok csakis az $1, 2, \dots, 99, 101$ lehetnek. 

1. Az x, y, z páratlan (pozitív) prímszámok, és

$$x + 40y + 600z = 2007.$$

Mik lehetnek x, y és z értékei?

Mivel x, y, z pozitív egészek, így $600z \leq 2007$, vagyis $z \leq 3$. De z páratlan prím, így $z = 3$. Ekkor $x + 40y + 600 \cdot 3 = 2007$, vagyis $x + 40y = 207$. Ebből $40y \leq 207$, vagyis $y \leq 5$ adódik. Mivel y is páratlan prím, így $y = 3$ vagy 5 jöhet szóba. Ha $y = 3$, akkor $x = 207 - 40 \cdot 3 = 87$, ami nem prím, így ez nem lehet. Ha $y = 5$, akkor $x = 207 - 40 \cdot 5 = 7$, ami valóban páratlan, pozitív prím.

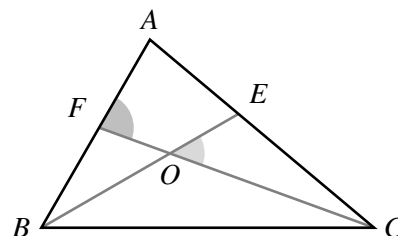
Tehát $x = 7, y = 5, z = 3$.



2. Az ABC háromszögben a BE és CF szögfelezők metszéspontja O (E az AC , F az AB oldalon van). Tudjuk, hogy $\angle AFC = 80^\circ$, és az $\angle EOC = 50^\circ$. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit!

Mivel $\angle BFO = 180^\circ - \angle AFC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$, és $\angle BOF = \angle EOC = 50^\circ$, így a BFO háromszög B -nél lévő szöge $180^\circ - 100^\circ - 50^\circ = 30^\circ$. De a BO félegyenes az ABC szögfelezője, így $\angle ABC = 60^\circ$, és $\angle OBC = 30^\circ$. Másrészt $\angle BOC = 180^\circ - \angle BOF = 130^\circ$, így a BCO háromszög C -nél lévő szöge $180^\circ - 30^\circ - 130^\circ = 20^\circ$. Mivel a CO félegyenes az ACB szögfelezője, így $\angle ACB = 40^\circ$. Ezekből pedig adódik $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

Tehát az ABC háromszög szögei $80^\circ, 60^\circ$ és 40° rendre az A, B és C csúcsoknál.



3. Hány olyan hatjegyű, tízes számrendszerbeli szám van, amelynek számjegyei különbözők, és a szám osztható 25-tel?

Egy pozitív egész pontosan akkor osztható 25-tel, ha az utolsó 2 számjegye 00, 25, 50 vagy 75, hiszen $n = 100k + ab$ pontosan osztható 25-tel, amikor ab (n és k nemnegatív egészek). Ebből a 00 nem lehetséges, mert különbözőnek kell lennie a számjegyeknek. A többi 3 eset mindegyikében az előző 4 jegy tetszőleges lehet, azzal a megkötéssel, hogy különbözők egymástól és az utolsó 2 számjegytől, valamint az első jegy nem lehet 0.

Ha az utolsó 2 jegy a 25 vagy a 75, akkor az első jegy lehet 7-féle (mivel a 0 nem lehet), ezt kiválasztva a második is 7-féle (mivel itt már a 0 szóba jöhet), a harmadik már csak 6-féle, és a negyedik pedig csak 5-féle. Így mindkét esetben az előző 4 jegy $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ -féle lehet.

Ha az utolsó 2 jegy az 50, akkor a 0 eleve nem jön szóba az első 4 jegynél, így az első, második, harmadik és negyedik jegyeket rendre kiválasztva 8-, 7-, 6- és 5-féleképpen választhatunk. Vagyis az első 4 jegy $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ -féle lehet.

Tehát összesen $2 \cdot 1470 + 1680 = 4620$ kívánt tulajdonságú hatjegyű szám van.



4. Egy derékszögű háromszög oldalai hosszának szorzata kétszerese a háromszög három magassága szorzatának. Mekkora a háromszög hegyesszögei?

Legyenek a derékszögű háromszög csúcsai A, B és C , az ezekkel szemközti oldalak hosszai rendre a, b és c , és legyen C a derékszögű csúcs (azaz c az átfogó hossza). Jelölje m a C -hez tartozó magasság hosszát. Mivel a C -nél lévő derékszög miatt az A -hoz tartozó magasság az $\overline{AC} = b$, a

B -hez tartozó pedig a $\overline{BC} = a$, így az oldalhosszak szorzata abc , a magasságoké pedig abm . Tehát a feltétel szerint

$$abc = 2abm,$$

azaz $a, b \neq 0$ miatt $c = 2m$.

Legyen O az $\overline{AB}$ átfogó felezőpontja. A Thalész-tétel szerint C rajta kell, hogy legyen az O körüli, $r = \frac{c}{2}$ sugarú (A -n és B -n átmenő) k körön. Másrészt $c = 2m$ miatt

$$m = \frac{c}{2} = r,$$

vagyis C az AB egyenestől r távolságra van. De a k körnek csak 2 ilyen pontja van, az O -ban AB -re állított merőleges metszéspontjai k -val (X, Y). Hiszen az X -ben és Y -ban k -hoz húzott e_1 , illetve e_2 érintők merőlegesek XY -ra, azaz párhuzamosak AB -vel, valamint az X és Y pontok is r távolságra vannak AB -től, így a szigorúan e_1 és e_2 között lévő pontok mind közelebb vannak AB -hez, mint r . Márpedig a k összes pontja az X és az Y kivételével szigorúan a két érintő közé esik, tehát pontosan az X és az Y lehet csak a C .

A két eset szimmetria miatt nyilván egybevágó ABC háromszögeket ad, így elég az egyiket nézni, legyen ez az ABX háromszög. Ez szimmetrikus az OX egyenesre, így $\overline{AX} = \overline{BX}$, azaz a derékszögű háromszög egyenlőszárú. Eszerint pedig a hegyesszögei

$$\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ\text{-osak.}$$



Országos döntő

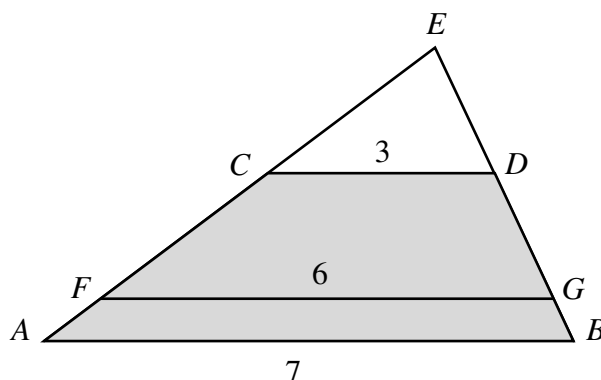
1. Igazoljuk, hogy $3^{202} + 5 \cdot 3^{210} + 1$ összetett szám!

Megmutatjuk, hogy osztható 5-tel: $5 \mid 5 \cdot 3^{210}$, ezért elég belátni, hogy $5 \mid 3^{202} + 1$. Tudjuk, hogy $3^{202} = 9^{101}$, és a 9-nek az 5-tel vett osztási maradéka -1 , a 101 pedig páratlan, tehát $3^{202} + 1$ 5-ös maradéka $-1 + 1 = 0$.



2. Egy trapéz két párhuzamos oldala 3 és 7 egység. Az ezekkel az oldalakkal párhuzamos 6 egység hosszú szakasz a trapézt két trapézzra bontja. Mekkora a két trapéz területének aránya?

Hosszabbítsuk meg a trapéz szárait, legyen a metszéspontjuk E . Használjuk az ábra jelöléseit!



CD és FG párhuzamosságából következik, hogy ECD és EFG háromszögek hasonlóak, innen tudjuk, hogy

$$T_{EFG} = 4 \cdot T_{ECD},$$

mert hasonló háromszögek területének aránya a megfelelő oldalhosszak négyzetének aránya. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$T_{EAB} = \frac{49}{9} \cdot T_{ECD}.$$

Tehát a két trapéz területének aránya:

$$\frac{\frac{49}{9} - 4}{4 - 1} = \frac{13}{27}.$$



3. Az $1, 2, 3, \dots, 9, 10$ számokat leírjuk valamilyen sorrendben. Ezután minden számhoz hozzáadjuk azt a sorszámot, ahányadik a leírt sorban. Igazoljuk, hogy a kapott összegek között biztosan lesz kettő, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik!

Legyen az $1, 2, 3, 4, \dots, 9, 10$ számok egy sorrendje $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_9, a_{10}$, és legyen minden $1 \leq i \leq 10$ -re

$$b_i = a_i + i.$$

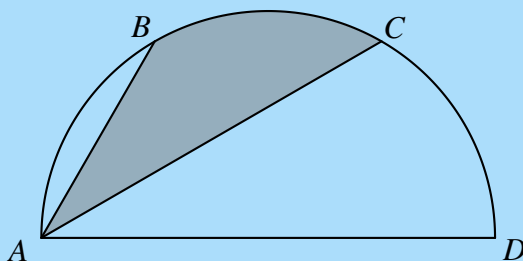
Indirekt módon bizonyítjuk be az állítást: Tegyük fel, hogy nincs kettő a b_i -k között, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik. Ez pontosan akkor teljesül, ha minden lehetséges végződés pontosan egyszer fordul elő. Ekkor a $b_1 + b_2 + \dots + b_{10}$ összeg 10-es maradéka 5, mert az egyes helyiértéken álló számok összege $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$, másrészt viszont tudjuk, hogy

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + 1 + 2 + \dots + 10 = 90,$$

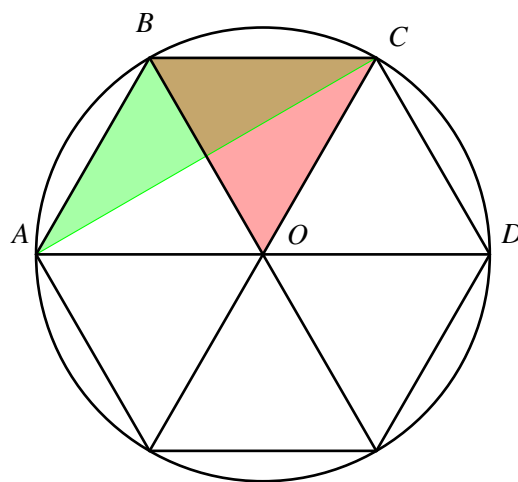
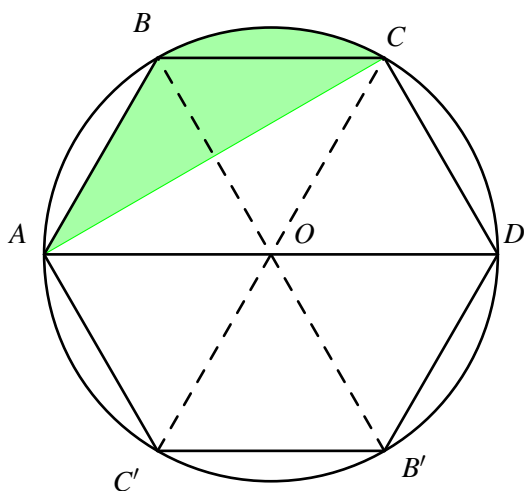
tehát a $b_1 + b_2 + \dots + b_{10}$ összeg osztható 10-zel. Ezzel ellentmondásra jutottunk, azaz lesz két különböző a b_i -k között, ami ugyanarra a számjegyre végződik.



4. Az ábrán látható félkör területe t . Az $ABCD$ félkört a B és C pontok három, egyenlő hosszú ívre bontják. Mennyi az ABC síkidom területe?



Legyen O a kör középpontja. Tükrözzük B -t és C -t O -ra, legyenek a tükörképek rendre B' és C' .



Ekkor az A, B, C, D, B', C' pontok 6 egyenlő ívre osztják a kört, tehát $ABCD B' C'$ egy szabályos hatszög. Ebből következik, hogy OAB és OBC szabályos háromszögek, azaz

$$OA = OB = OC = AB = BC.$$

Megmutatjuk, hogy az ABC síkidom területe megegyezik ABO síkidom területével, amit már könnyen kiszámolhatunk: $\frac{t}{3}$. $ABCO$ négyszög rombusz, tehát az átlói felezik a területét. Innen kapjuk, hogy

$$T_{ABC\Delta} = T_{ABO\Delta}.$$

A BC szakasz és rövidebb BC ív által határolt síkidom területe megegyezik az AB oldal és ív által határolt síkidom területével, mert egymás 60° -os elforgatottjai O körül.

Ezzel beláttuk, hogy a keresett terület $\frac{t}{3}$.



5. A 2007 négyjegyű számhoz írunk jobbról hozzá 3 számjegyet úgy, hogy a kapott hétjegyű tízes számrendszerbeli szám osztható legyen 7-tel, 9-cel és 11-gyel is!

Egy $\overline{2007xyz}$ alakú számot keresünk, vagyis

$$\overline{2007xyz} = 2007000 + 100x + 10y + z.$$

7, 9 és 11 páronként relatív prímek, ezért $\overline{2007xyz}$ pontosan akkor lesz osztható mindhárommal, ha osztható a szorzatukkal, 693-mal. 2007000 693-mal vett osztási maradéka 72, azaz xyz -nek egy olyan háromjegyű számnak kell lennie, amire

$$693 \mid \overline{xyz} + 72.$$

$693 - 72 = 621$ ilyen lesz, és a gondolatmenetből az is kiderül, hogy másképp nem tudunk 3 számjegyet írni a 2007 után a feltételeknek eleget téve.



1. Mely pozitív egész x -re igaz, hogy

$$x^4 + 17x^2 + 60$$

egy egész szám négyzete?

Vizsgáljuk meg, hogy a kifejezés milyen egész szám négyzetével lehet egyenlő.

$$(x^2 + 7)^2 = x^4 + 14x^2 + 49 \leq x^4 + 17x^2 + 60 \leq x^4 + 18x^2 + 81 = (x^2 + 9)^2$$

$(x^2 + 7)^2$ és $(x^2 + 9)^2$ között csak egyetlen négyzetszám van, ezért csak az lehetséges, hogy

$$x^4 + 17x^2 + 60 = (x^2 + 8)^2 = x^4 + 16x^2 + 64$$

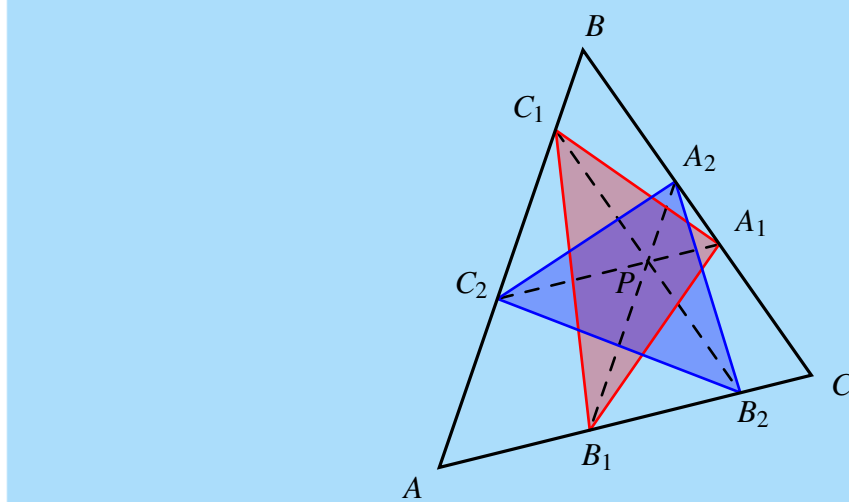
Ebből azt kapjuk, hogy

$$x^2 = 4$$

Tehát $x = 2$ az egyetlen pozitív egész érték, amire a fenti kifejezés négyzetszám.



2. Az ABC hegyesszögű háromszög egy P belső pontján át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. Az ábrán megjelöltük a párhuzamosok oldalakkal való metszéspontjait. Igazoljuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög területe egyenlő az $A_2B_2C_2$ háromszög területével.



Első megoldás: Az $A_1B_1C_1$ háromszög területe

$$t(A_1B_1C_1) = t(A_1B_1P) + t(B_1C_1P) + t(C_1A_1P)$$

Az $A_2B_2C_2$ háromszög területe

$$t(A_2B_2C_2) = t(A_2B_2P) + t(B_2C_2P) + t(C_2A_2P)$$

Azt fogjuk belátni, hogy $t(A_1B_1P) = t(A_2B_2P)$. Hasonlóan látható be, hogy $t(B_1C_1P) = t(C_2A_2P)$, illetve $t(C_1A_1P) = t(C_2A_2P)$. Ebből már következik az állítás.

$t(A_1PB_1) = t(A_1PB_2)$, mert az A_1P alap közös, és az ehhez tartozó magasság mindkét esetben a AC és a A_1C_2 párhuzamos egyenesek távolsága.

$t(A_1B_2P) = t(A_2B_2P)$, mert a B_2P alap közös, és az ehhez tartozó magasság mindkét esetben a BC és B_2C_1 párhuzamos egyenesek távolsága.

A két egyenletet összevetve valóban $t(A_1B_1P) = t(A_2B_2P)$.

Második megoldás: Jelölje a háromszög területét T .

Az $A_1B_1C_1$ háromszög területe

$$t(A_1B_1C_1) = T - t(AB_1C_1) - t(BC_1A_1) - t(CA_1B_1)$$

Az $A_2B_2C_2$ háromszög területe

$$t(A_2B_2C_2) = T - t(AB_2C_2) - t(BC_2A_2) - t(CA_2B_2)$$

A párhuzamos szelők tétele miatt

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{C_2A}{C_2B} := \frac{x}{1}$$

$$\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{A_2B}{A_2C} := \frac{y}{1}$$

$$\frac{C_1B}{C_1A} = \frac{B_2C}{B_2A} := \frac{z}{1}$$

$$t(AB_1C_1) = \frac{y}{1+y} \cdot \frac{1}{1+z} \cdot T$$

$$t(BC_1A_1) = \frac{z}{1+z} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot T$$

$$t(CA_1B_1) = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+y} \cdot T$$

$$t(AB_2C_2) = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{x}{1+x} \cdot T$$

$$t(BC_2A_2) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} \cdot T$$

$$t(CA_2B_2) = \frac{1}{1+y} \cdot \frac{z}{1+z} \cdot T$$

Ezek alapján

$$t(A_1B_1C_1) = T \cdot \left(1 - \frac{y(1+x) + z(1+y) + x(1+z)}{(1+x)(1+y)(1+z)}\right)$$

$$t(A_2B_2C_2) = T \cdot \left(1 - \frac{x(1+y) + y(1+z) + z(1+x)}{(1+x)(1+y)(1+z)}\right)$$

A két kifejezés egyenlő, hiszen

$$y(1+x) + z(1+y) + x(1+z) = x(1+y) + y(1+z) + z(1+x)$$

Tehát a két háromszög területe valóban egyenlő.



3. Ricsi egy unalmas délutánon leírta egy darab papírra a pozitív egész számokat 1-től kezdve valameddig. Másnap csak annyit árult el, hogy a leírt páros számok összegének és a leírt páratlan számok összegének aránya $\frac{31}{30}$. Meddig írta le a számokat Ricsi?

A páros számok összege a nagyobb, ezért az utolsó leírt szám biztosan páros. Tegyük fel, hogy Ricsi 1-től $2k$ -ig írta le a számokat.

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & \dots & 2k \\ 2k & 2k-2 & 2k-4 & \dots & 2 \end{array}$$

Ha a fenti módon kétszer egymás alá írjuk a számokat, akkor könnyen látszik, hogy a páros számok összege $\frac{(2k+2) \cdot k}{2} = (k+1) \cdot k$.

A páros számokat összepárosítva a náluk eggyel kisebb páratlan számmal kapjuk, hogy a páratlan számok összege $(k+1) \cdot k - k = k^2$.

A feltevés szerint $\frac{(k+1)k}{k^2} = \frac{k+1}{k} = \frac{31}{30}$. Tehát $k = 30$, így Ricsi 60-ig írta le a számokat.



4. Igaz-e, hogy

$$2006^{2006} - 2008$$

osztható 2007-tel?

A 2006 2007-tel osztva -1 maradékot ad. Ha két számot összeszorozunk vagy összeadunk, az eredmény osztási maradékát megkaphatjuk úgy is, hogy csak a tagok osztási maradékával végezzük a műveletet. Hiszen például ha az m -mel való osztási maradékot vizsgáljuk,

$$(km + a) \cdot (lm + b) = klm^2 + kmb + lma + ab = m \cdot (klm + kb + la) + ab$$

Tehát 2006^{2006} 2007-tel való osztási maradéka $(-1)^{2006} = 1$. 2008 is egy maradékot ad, így $2006^{2006} - 2008$ maradéka $1 - 1 = 0$, azaz osztható 2007-tel.



XXXVII. VERSENY 2007–08.

FELADATOK

Megyei forduló

1. A következő szorzásban 4 számjegy olvashatatlan, helyüket $\square$ jelöli.:

$$\square 2 \square \cdot 13 = 2 \square \square 1.$$

Keressük meg a hiányzó számjegyeket!



2. Hány részre osztja fel a síkot két (nem feltétlenül egyforma) háromszög? Vizsgáld meg az összes esetet!
3. Hány péntek van 2008-ban? Legfeljebb hány péntek lehet egy évben?
4. Tizenegy kártyára felírták 1-től 11-ig az egész számokat. Szét lehet-e osztani a kártyákat két csoportra úgy, hogy az egyik csoportba tartozó kártyákra írt számok összege 11-gyel legyen több, mint a másik csoportba tartozó kártyákra írt számok összege? És úgy, hogy az egyik csoportban 10-zel legyen több a számok összege, mint a másikban?



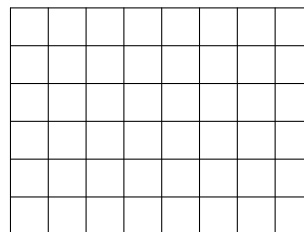
Megyei forduló

1. Számítsuk ki az 1-től 100-ig terjedő pozitív egész számok számjegyeinek összegét!
2. Adjunk meg 500 egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy a számok leírásához összesen 2008 darab számjegyre legyen szükség!
3. Egy téglatest 3 különböző területű oldallapjának területe 12 cm^2 , 18 cm^2 és 24 cm^2 . Számítsuk ki a téglatest térfogatát!
4. Egy négyzetet 9 egybevágó (egyforma) kis négyzetre bontottunk. A kapott kisebb négyzetek mindegyikét színezzük ki egy-egy színnel úgy, hogy a lehető legtöbb színt használjuk, és bármely két különböző színhez legyen két ilyen színű kis négyzet, amelyeknek egy oldala közös. Hány színnel lehet ezt a kiszínezést elvégezni?



Megyei forduló

1. Melyek azok a tízes számrendszerben felírt háromjegyű számok, amelyekhez hármat adva a kapott háromjegyű szám számjegyeinek összege harmadrésze az eredeti szám számjegyei összegének? →
2. Hány olyan pozitív egész szám van, amely kisebb 1000-nél, és tízes számrendszerbeli felírásához legalább egy 9-es számjegyre van szükség? →
3. Egy iskolában 3 tantárgyból, matematikából, fizikából és informatikából rendeztek versenyt. A matematika versenyen 60-an indultak, a fizikán 42-en, az informatikán 24-en. Az is kiderült, hogy két tantárgyból pontosan fele annyian indultak, mint egy tantárgyból, és három tantárgyból éppen harmad annyian, mint egy tantárgyból. Összesen hány tanuló indult valamelyik versenyen? →
4. Mutassuk meg, hogy egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek hegyesszögei 30° és 60° , fel lehet darabolni 3, ugyancsak olyan derékszögű háromszögre, amelynek a hegyesszögei 30° és 60° ! →
5. Hány (nem feltétlenül különböző méretű) téglalap van ebben a téglalapban? (Olyan téglalapokat vizsgáljunk csak, amelyeknek oldalai az eredeti „nagy” téglalap oldalaival párhuzamosak.) →



Megyei forduló

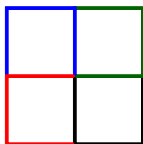
1. Egyszer néhány fiú horgászni ment a közeli tóhoz. Egyikük 6 halat fogott, a többiek fejenként 13-at. Egy másik alkalommal egy másik fiúcsapat ment horgászni, ezúttal egyikük 5 halat fogott, a többiek fejenként 10-et. Tudjuk még, hogy mindkét alkalommal összesen ugyanannyi halat fogtak, méghozzá 100-nál többet, de 200-nál nem többet. Hányan mentek horgászni az első alkalommal, és hányan a második alkalommal? →
2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának mely P pontjára igaz, hogy P -nek a befogóktól mért távolságait négyzetre emelve és összeadva a legkisebb értéket kapjuk? →
3. Mutassuk meg, hogy van olyan háromszög, amelyre igaz, hogy mindhárom oldalának és mindhárom magasságának hosszát egész számmal lehet megadni! →
4. Az ABC háromszög magasságpontja M . Tudjuk, hogy $CM = AB$. Mekkora a háromszög C csúcsnál fekvő szöge? →
5. Egy táblára felírták 1-től 2008-ig a pozitív egész számokat. Egy lépésben letörölhetők olyan számok, amelyeknek összege osztható 5-tel, és helyettük felírják az összeg ötöd részét. Véges sok ilyen lépésben elérhető-e, hogy csak az 1 szám maradjon a táblán? →

Országos döntő

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páratlan? →
2. Hány részre osztják a teret egy kocka lapjai által meghatározott síkok? →
3. Hányféleképpen lehet felváltani egy 1000 Ft-ost 100, 200 és 500 Ft-osokra (nem kell mindegyik címletet felhasználni)? →
4. Egy évben legfeljebb hány olyan hónap lehet, amelyben öt vasárnap van? →

Országos döntő

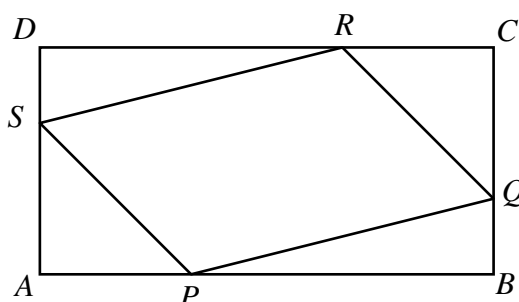
1. Számítsuk ki az összes tízes számrendszerbeli háromjegyű szám számjegyeinek összegét! →
2. Hányféleképpen lehet a kocka lapjait pirosra és kékre festeni, ha két kifestést nem tekintünk különbözőnek, ha azok egymásba forgathatók? →
3. Számítsuk ki a következő összeget:
 $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + \dots + 2006 - 2007 - 2008 + 2009.$ →
4. Érdekes, hogy  alakú „keretekből” (három 1 hosszúságú szakasz „U” alakban) össze lehet állítani négyzetrácsot. Például 2×2 -es négyzetrácsot így:



Mutassuk meg, hogy 3×3 -as és 5×5 -ös négyzetrácsot is össze lehet állítani ilyen keretekből! →

Országos döntő

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzata 5040? →
2. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros? →
3. Az $ABCD$ téglalap oldalain felvettük a P, Q, R, S harmadoló pontokat. Az $ABCD$ téglalap területének hányad része a $PQRS$ négyszög területe? →



4. Egy anyának és két lányának az életkora egy prímszám három különböző hatványa. Hány éves az anya és két lánya most, ha tudjuk, hogy egy évvel ezelőtt mindhármuk életkora prímszám volt? →

Országos döntő

1. Keressünk minél nagyobb olyan tízes számrendszerben felírt számot, amelyre igaz a következő tulajdonság: a két szélső számjegy kivételével minden számjegyének kétszerese kisebb, mint a vele szomszédos két számjegy összege (pl.: 743347 ilyen szám). →
2. Peti azt javasolja a Nemzeti Banknak, hogy a bevont 1 és 2 forintosok helyett vezessék be a 3 forintost, mert így minden 7 Ft-nál nagyobb egész forintot ki lehetne fizetni akár 3 és 5 forintosokkal is, nem kellene kerekíteni. Igaza van-e Petinek? →
3. Egy kocka csúcsait pirosra és kékre festhetjük. Hány különböző kifestés lehetséges, ha két kifestést akkor tekintünk azonosnak, ha egymásba forgathatók? →
4. Hány olyan négyjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amelyben van legalább két egyforma számjegy? →

Országos döntő

1. Van-e prímszám a következő alakú tízes számrendszerbeli számok között:

$$121, 11211, 1112111, 111121111, \dots ?$$



2. Az ABC háromszögben P a BC oldal, Q a PA szakasz, R a BQ szakasz, végül S a CR szakasz felezőpontja. Az ABC háromszög területe hányszorosa a QRS háromszög területének? 
3. Igazoljuk, hogy a 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó előtti számjegy mindig páros ($3^1 = 03$, és $3^2 = 09$). 
4. Az első tíz pozitív egész szám összegében: az $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10$ összegben bármelyik szám előjelét „+”-ról „-”-ra változtathatjuk. Elérhető-e így, hogy az új összeg értéke 20 legyen? 
5. Hány olyan négyjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amelynek számjegyei pontosan kétféle, 0-tól különböző számjegyből állnak? 

Országos döntő

1. András és Bea testvérek. András arra a kérdésre, hogy hány évesek, így válaszolt. Ha a húgom, Bea annyi idős lesz, mint én vagyok most, akkor együtt 35 évesek leszünk. Most én háromszor olyan idős vagyok, mint a húgom volt akkor, amikor én olyan idős voltam, mint a húgom most. Hány éves most Andris és Bea? 
2. Egy tízes számrendszerben felírt számról azt mondjuk, hogy szerencsés, ha a számjegyeit két olyan csoportra bonthatjuk, amelyben a számjegyek összege egyenlő. Például 11, 22, 99, 123 szerencsés számok. Melyik az a legkisebb szerencsés szám, amelyre igaz, hogy a nála eggyel nagyobb szám is szerencsés? 
3. Jelöljön A egy 2008 jegyből álló, 9-cel osztható számot. Legyen B az A számjegyeinek összege, C a B számjegyeinek összege, végül D a C számjegyeinek összege. Határozzuk meg D értékét! 
4. Az $ABCD$ négyzet AC átlóján lévő P pontra igaz, hogy $AP = AB$. A BC oldalon lévő Q pontra igaz, hogy PQ merőleges AC -re. Igazoljuk, hogy a PC, PQ, BQ szakaszok egyenlők! 

Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy ha két pozitív egész szám összege 2310, akkor a két szám szorzata nem osztható 2310-zel! →
2. Azt mondjuk, hogy a 8, 9 szomszédos számokból álló számpár érdekes, mert $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, azaz mindkét szám prímtényezői legalább második hatványon szerepelnek. Keress még legalább egy ilyen érdekes számpárt! →
3. Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 1. Az AB oldalon felveszünk egy P pontot, az AD -n pedig egy Q pontot úgy, hogy az APQ háromszög kerülete 2 egység legyen. Igazoljuk, hogy $\angle PCQ = 45^\circ$! →
4. Egy sorozat első két tagja: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ és minden további tag a két szomszédjának szorzatánál eggyel kisebb. Számítsuk ki a sorozat első 560 tagjának összegét! →
5. Egy egész oldalhosszúságú négyzetet feldaraboltunk 100 (nem feltétlenül egybevágó) négyzetre. Ezek közül 99-nek a területe 1 területegység. Mennyi lehet a századik négyzet területe? Megvalósítható-e a kapott eredmény? →

Országos döntő

1. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre igaz, hogy $4p - 1$ négyzetszám? →
2. Számítsuk ki egy háromszög és a súlyvonaláiból szerkesztett háromszög területének arányát! →
3. Ábrázoljuk a következő függvényt a $[-2; 4]$ intervallumon:

$$f(x) = ||x - 1| - |x - 3||.$$
 →
4. A derékszögű háromszögbe írt kör átfogóra illeszkedő érintési pontja két részre osztja az átfogót. Igazoljuk, hogy e két szakasz hosszának szorzata a háromszög területével egyenlő! →

MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

1. A következő szorzásban 4 számjegy olvashatatlan, helyüket $\square$ jelöli.:

$$\square 2 \square \cdot 13 = 2 \square \square 1.$$

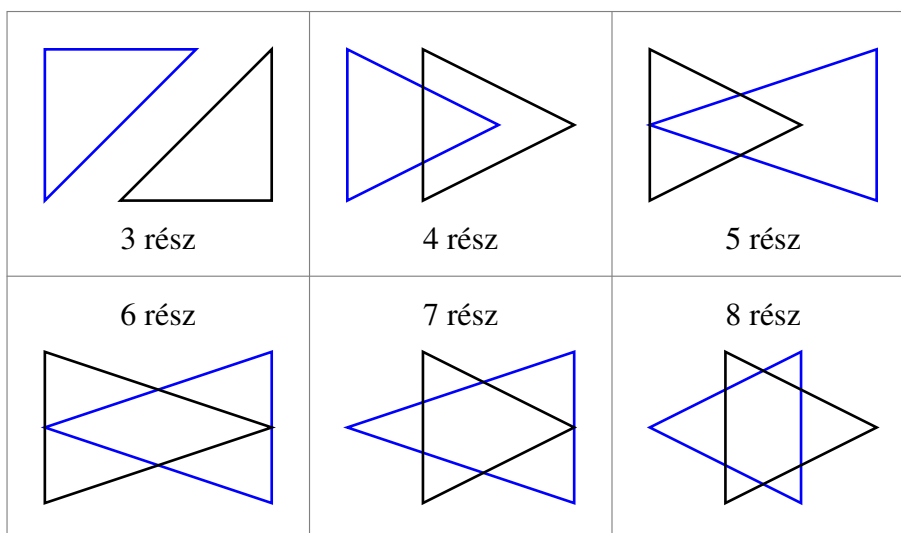
Keressük meg a hiányzó számjegyeket!

Ha a háromjegyű szám százask helyén álló (azaz első) jegye legfeljebb 1, akkor a szorzata 13-mal legfeljebb $129 \cdot 13 = 1677$. Ha a százask helyén legalább 3 áll, akkor a szorzat legalább $320 \cdot 13 = 4160$. Mivel a szorzat $2\square\square 1$, a háromjegyű szám százask helyén a 2 szerepel: $22\square \cdot 13 = 2\square\square 1$.

A szorzat utolsó számjegyét az utolsó jegyek szorzata határozza meg. Így adódik (akár próbálgatással), hogy a háromjegyű szám utolsó számjegye a 7. Elvégezve a szorzást ezt kapjuk: $227 \cdot 13 = 2951$. 

2. Hány részre osztja fel a síkot két (nem feltétlenül egyforma) háromszög? Vizsgáld meg az összes esetet!

A lehetséges esetekre példák:



Egy háromszög két részre osztja a síkot. A második háromszög mindegyik oldala az első háromszög legfeljebb két oldalát metszi. Ez a maximum hat metszéspont a második háromszög területét legfeljebb 6 részre osztja, és minden ilyen kerületdarab egy eddig létrejött tartományt oszt két részre. Azaz legfeljebb $2 + 6 = 8$ rész lehet.

Megjegyzés. Ha megengednénk, hogy a két háromszög azonos legyen, akkor 2 részre is lehetne osztani a síkot. Sőt ha azt is megengednénk, hogy a háromszögek oldalai 0 cm hosszúak legyenek, akkor az 1 rész is elérhető lenne. 

3. Hány péntek van 2008-ban? Legfeljebb hány péntek lehet egy évben?

2008-ban összesen 52 péntek van. Hét egymás után követő nap között pontosan 1 péntek van. Minden évben legalább 52 péntek van, mivel $52 \cdot 7 = 364 < 365$. És minden évben legfeljebb 53 péntek lehet, mert $53 \cdot 7 = 371 > 366$.

$365 \text{ nap} = 52 \text{ hét} + 1 \text{ nap}$, így ha egy év péntekkel kezdődik, akkor (ha nem szökőév) péntekkel ér véget, és így 53 péntek van egy ilyen évben. 

4. Tizenegy kártyára felírták 1-től 11-ig az egész számokat. Szét lehet-e osztani a kártyákat két csoportra úgy, hogy az egyik csoportba tartozó kártyákra írt számok összege 11-gyel legyen több, mint a másik csoportba tartozó kártyákra írt számok összege? És úgy, hogy az egyik csoportban 10-zel legyen több a számok összege, mint a másikban?

A kártyákra írt számok összege: $1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = 66$. Ha ebből 11-et elveszünk, akkor 55 marad, ami páratlan szám, tehát nem osztható fel két egyenlő, egész szám összegére.

A másik kettéosztás lehetséges: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $\{8, 9, 10, 11\}$ esetén az első csoportban 28, a másodikban 38 a számok összege. Egy másik jó felosztás: $\{1, 3, 6, 8, 10\}$ és $\{2, 4, 5, 7, 9\}$. 

Megyei forduló

1. Számítsuk ki az 1-től 100-ig terjedő pozitív egész számok számjegyeinek összegét!

Az egyesek helyi értékén mindegyik számjegy 10-szer fordul elő, így az itt szereplő számjegyek összege: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 10 = 450$. A tízesek helyi értékén álló számjegyek összege ugyanilyen okokból szintén 450, a százask helyén egyetlen 1 áll, tehát az összes számjegy összege: $450 + 450 + 1 = 901$. 

2. Adjunk meg 500 egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy a számok leírásához összesen 2008 darab számjegyre legyen szükség!

Mivel $2008 = 4 \cdot 500 + 8 = 4 \cdot 492 + 5 \cdot 8$, ezért ha az 500 egymást követő pozitív egész között 492 négyjegyű és 8 darab ötjegyű szám van, akkor azok leírásához éppen 2008 számjegyre van szükség. A keresett számok tehát:

$$9508, 9509, 9510, \dots, 9999, 10000, \dots, 10007.$$


3. Egy téglatest 3 különböző területű oldallapjának területe 12 cm^2 , 18 cm^2 és 24 cm^2 . Számítsuk ki a téglatest térfogatát!

A téglatest éleinek centiméterekben mért hosszát jelölje a, b, c . Ekkor a 3 lap területe: $ab = 24 \text{ cm}^2$, $ac = 18 \text{ cm}^2$, $bc = 12 \text{ cm}^2$. A három terület szorzatában mindegyik él kétszer szerepel szorzótényezőként, így $ab \cdot ac \cdot bc = a^2 b^2 c^2 = 24 \cdot 18 \cdot 12$. Mivel

$$24 \cdot 18 \cdot 12 = 72 \cdot 72,$$

ezért a téglatest térfogata: $V = abc = 72 \text{ cm}^3$. 

4. Egy négyzetet 9 egybevágó (egyforma) kis négyzetre bontottunk. A kapott kisebb négyzetek mindegyikét színezzük ki egy-egy színnel úgy, hogy a lehető legtöbb színt használjuk, és bármely két különböző színhez legyen két ilyen színű kis négyzet, amelyeknek egy oldala közös. Hány színnel lehet ezt a kiszínezést elvégezni?

1	2	3
3	4	5
5	1	2

A megfelelő színezést 5 színnel meg lehet csinálni, az ábrán számok jelölik a színezést.

6 színnel már nem oldható meg a feladat, mert 12 olyan szakasz van, ami szomszédos négyzetek közös oldala, viszont legalább $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ -re lenne szükség, ha bármely kettő különböző színnek érintkeznie kellene egy ilyen szakasz mentén.



Megyei forduló

1. Melyek azok a tízes számrendszerben felírt háromjegyű számok, amelyekhez hármadat adva a kapott háromjegyű szám számjegyeinek összege harmadrésze az eredeti szám számjegyei összegének?

Ha a keresett szám $\overline{abc}$ alakú, akkor nyilván $c \geq 7$, mert csak ekkor csökkenhet a 3-mal növelés után a számjegyek összege. Ez alapján vizsgáljunk 3 esetet ($c = 7$, $c = 8$, $c = 9$):

Ha $c = 7$ és $b < 9$, akkor a feltétel szerint $a + b + 7 = 3(a + b + 1)$, azaz $a + b = 2$, így $a = 2$, $b = 0$, vagy $a = 1$, $b = 1$ lehet. A 207 és a 117 tényleg jó megoldások.

A $c = 7$, $b = 9$ eset nem jó, mert ekkor $a + 9 + 7 = 3(a + 1)$, ebből $13 = 2a$, de mivel a számjegyek egész számok, így ez nem lehetséges.

Ha $c = 8$ és $b < 9$, akkor $a + b + 8 = 3(a + b + 2)$, vagyis $a + b = 1$, így csak az $a = 1$, $b = 0$ eset lehetséges. Ebből a 108 adódik jó megoldásként. Ha $c = 8$ és $b = 9$, akkor $a + 9 + 8 = 3(a + 2)$, amiből kapjuk, hogy $2a = 11$, ami számjegy esetén szintén nem lehetséges.

Végül, ha $c = 9$, $b < 9$, akkor $a + b + 9 = 3(a + b + 3)$, vagyis $a + b = 0$, ami csak az $a = 0$, $b = 0$ esetben lenne lehetséges, de abból nem kapunk egy háromjegyű számot. Ha $c = 9$ és $b = 9$, akkor $a + 9 + 9 = 3(a + 3)$, amiből kapjuk, hogy $2a = 9$, ami számjegy esetén szintén nem lehetséges.

Így 3 megoldás van: 108, 117, 207.



2. Hány olyan pozitív egész szám van, amely kisebb 1000-nél, és tízes számrendszerbeli felírásához legalább egy 9-es számjegyre van szükség?

Első megoldás: A kétjegyű számok között 19 ilyen szám van, hiszen van 9, aminek az utolsó jegye 9-es, de az első nem (9, 19, ..., 89) és 10 darab, aminek az első jegye 9-es. Így $9 \cdot 19$ olyan szám van, ami 9-essel kezdődik és van benne 9-es, hiszen a 9 darab ilyen 100-as csoport van 900-ig. Az utolsó 100 szám pedig tartalmaz 9-et, hiszen az első jegye 9-es. Ez összesen $100 + 9 \cdot 19 = 271$ szám.

Második megoldás: Összesen 999 darab 1000-nél kisebb pozitív egész szám van. Könnyebb megszámolni azokat, amikben nincs 9-es számjegy, és ha ezeket levonjuk az összesből, akkor megkapjuk a választ a kérdésre. $9 \cdot 9 \cdot 9 - 1 = 728$ olyan van, amiben nincs 9-es számjegy. Itt úgy

képzeljük a számokat, hogy akár az első, vagy első két jegyük is lehet 0, vagyis a szám két-, vagy egyjegyű. Ekkor csak a 9-es tiltott, így minden helyiértéken egymástól függetlenül 9-féleképpen dönthetünk. Viszont amikor mindhárom számjegy 0, az nem lesz pozitív, ezért kell levonnunk 1-et. Így tehát azok száma, amelyekhez legalább egy 9-es számjegy kell: $999 - 728 = 271$. ↑

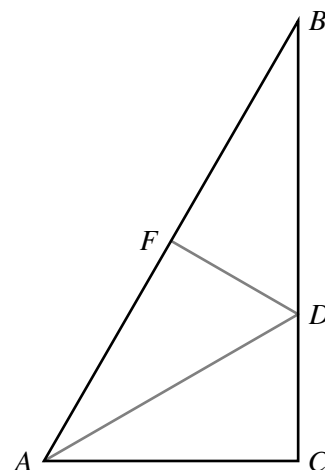
3. Egy iskolában 3 tantárgyból, matematikából, fizikából és informatikából rendeztek versenyt. A matematika versenyen 60-an indultak, a fizikán 42-en, az informatikán 24-en. Az is kiderült, hogy két tantárgyból pontosan fele annyian indultak, mint egy tantárgyból, és három tantárgyból éppen harmad annyian, mint egy tantárgyból. Összesen hány tanuló indult valamelyik versenyen?

Jelölje x az egy tantárgyból versenyzők számát. Minden tanulót számoljunk meg minden egyes versenyen, így a feltétel alapján: $x + 2\frac{x}{2} + 3\frac{x}{3} = 60 + 42 + 24 = 126$, amiből kapjuk, hogy $3x = 126$, vagyis $x = 42$. Az összes versenyzők száma tehát $42 + \frac{42}{2} + \frac{42}{3} = 42 + 21 + 14 = 77$. ↑

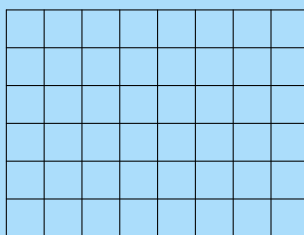
4. Mutassuk meg, hogy egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek hegyesszögei 30° , és 60° , fel lehet darabolni 3, ugyancsak olyan derékszögű háromszögre, amelynek a hegyesszögei 30° és 60° !

Az ábrán látható módon meghúzzuk a 60° -os szög szögfelezőjét, ami a D pontban metszi a BC oldalt. Emiatt $\angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$. Most a D -ből állítsunk merőlegest az AB átfogóra, legyen ennek talppontja az AB -n F . Ekkor $\angle DFA = \angle DFB = 90^\circ$. Az $\angle ABC$ -ről tudtuk, hogy 30° , így $\angle BDF = 60^\circ$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\angle FDA = \angle ADC = 60^\circ$.

Vagyis az $\triangle ACD$, $\triangle AED$ és $\triangle BED$ háromszögek mindegyike derékszögű, és a hegyesszögei 60° és 30° . ↑



5. Hány (nem feltétlenül különböző méretű) téglalap van ebben a téglalapban? (Olyan téglalapokat vizsgáljunk csak, amelyeknek oldalai az eredeti „nagy” téglalap oldalaival párhuzamosak.)



Első megoldás: Egy téglalapot úgy adhatunk meg, hogy a két-két oldalegyenesét kiválasztjuk. Kell választanunk a 7 függőleges közül kettőt és a 9 vízszintes közül is kettőt. Az előbbi $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ -féleképpen lehet megtenni, míg az utóbbit $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ -féleképpen. Mivel akárhogy választjuk a függőlegesseket, ahhoz minden vízszintes választás ad egy téglalapot, így az összes lehetőség száma ezek szorzata, vagyis $21 \cdot 36 = 756$.

Második megoldás: Válasszuk ki a téglalap két átelles csúcsát. Ez egyértelműen meghatározza a téglalapot. Csúcsot a 63 metszéspont közül kell kiválasztani. A két átelles csúcs nem lehet ugyanabban a sorban és oszlopban, így miután kiválasztottuk az elsőt, már csak $63 - 9 - 6 = 48$ pont közül lehet választani. Az átelles csúcsok kiválasztására tehát $63 \cdot 48$ lehetőség van. Így viszont egy téglalapot pontosan 4-szer kapunk meg, hisz mindkét átlója mentén 2-szer. Ezért összesen $\frac{63 \cdot 48}{4} = 756$ különböző téglalap van. ↑

1. Egyszer néhány fiú horgászni ment a közeli tóhoz. Egyikük 6 halat fogott, a többiek fejenként 13-at. Egy másik alkalommal egy másik fiúcsapat ment horgászni, ezúttal egyikük 5 halat fogott, a többiek fejenként 10-et. Tudjuk még, hogy mindkét alkalommal összesen ugyanannyi halat fogtak, méghozzá 100-nál többet, de 200-nál nem többet. Hányan mentek horgászni az első alkalommal, és hányan a második alkalommal?

Ha első alkalommal $k + 1$ fiú ment horgászni, akkor $13k + 6$ darab halat fogtak. Ha a második alkalommal $n + 1$ -en mentek, akkor $10n + 5$ -öt. Tudjuk, hogy ez a két szám egyenlő, és 100-nál nagyobb, de legfeljebb 200. Ebben a tartományban a következő 13-mal osztva 6 maradékot adó számok vannak:

110, 123, 136, 149, 162, 175, 188.

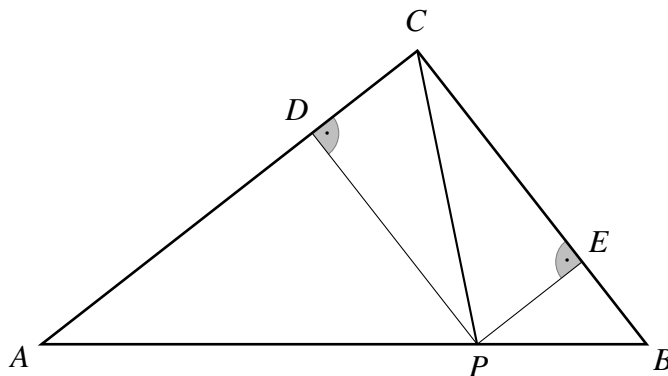
A második alkalom miatt tudjuk, hogy a fogott halak száma 5-re végződik, így láthatjuk, hogy egyedül a 175 lehetséges.

Ebből következően első alkalommal 14-en, második alkalommal pedig 18-an mentek horgászni.



2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának mely P pontjára igaz, hogy P -nek a befogóktól mért távolságait négyzetre emelve és összeadva a legkisebb értéket kapjuk?

Legyen a P merőleges vetülete AC -re D , a BC -re pedig E .



Mivel $EPDC$ egy téglalap, ezért $PD = EC$. Mivel mi a $PD^2 + PE^2$ minimumát keressük, ezért ez megegyezik a $CE^2 + PE^2$ kifejezés minimumával. Mivel a PEC háromszög derékszögű, ezért $CE^2 + PE^2 = PC^2$. Vagyis a PC^2 lehetséges értékeinek minimumát keressük. Ez viszont akkor minimális, ha PC értéke minimális. Mivel P illeszkedik az AB átfogóra, ezért PC értéke akkor minimális, ha P a C -hez tartozó magasság talppontja.



3. Mutassuk meg, hogy van olyan háromszög, amelyre igaz, hogy mindhárom oldalának és mindhárom magasságának hosszát egész számmal lehet megadni!

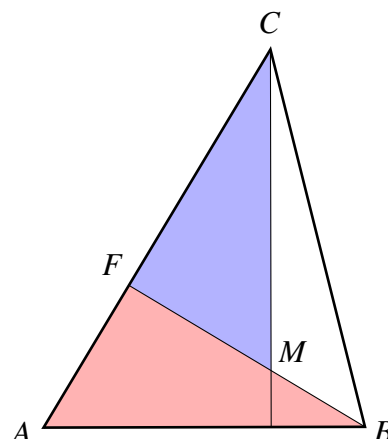
Érdekes derékszögű háromszöget keresni, mert ott két oldal egyben magasság is, így 6 hossz helyett csak 4-nél kell biztosítanunk, hogy a hossza egész szám. Ha a jól ismert 3, 4, 5 oldalakkal rendelkező derékszögű háromszöget vesszük, akkor annak az átfogóhoz tartozó magassága $\frac{12}{5}$ hosszúságú. Ez belátható hasonlósággal, vagy pedig úgy, hogy a háromszög területe egyrészt $\frac{3 \cdot 4}{2}$, másrészt pedig $\frac{5m}{2}$. Ha az a magasság $\frac{12}{5}$ hosszúságú, akkor ezt a háromszöget 5-szörösére nagyítva megfelelő háromszöget kapunk. Ennek oldalai: 15, 20, 25, magasságai pedig 12, 15, 20.



4. Az ABC háromszög magasságpontja M . Tudjuk, hogy $CM = AB$. Mekkora a háromszög C csúcsnál fekvő szöge?

Legyen a B -hez tartozó magasság talppontja F .

Észrevehetjük, hogy a CFM és az ABF háromszögek hasonlóak, hiszen van egy-egy derékszögük, és $\angle FCM = \angle FBA$, hiszen ezek merőleges szárú szögek. Ráadásul a derékszöggel szemközti két oldal, AB és CM a feltételünk szerint egyenlők, vagyis a két háromszög egybevágó. Így viszont a megfelelő oldalaik egyenlő hosszúságúak, vagyis $FB = FC$. Így tehát az FBC háromszög egy egyenlőszárú, derékszögű háromszög, vagyis $\angle FCB = \angle ACB = 45^\circ$.



5. Egy táblára felírták 1-től 2008-ig a pozitív egész számokat. Egy lépésben letörölhetők olyan számok, amelyeknek összege osztható 5-tel, és helyettük felírják az összeg ötöd részét. Végessok ilyen lépésben elérhető-e, hogy csak az 1 szám maradjon a táblán?

Nem érhető el. Figyeljük meg, hogy hogyan változik a táblán lévő számok összege. Egy lépés elején egy 5-tel osztható összeget törölünk le, vagyis az összeg $5k$ -val csökken, majd a helyére felírjuk a k -t. Így egy teljes lépésben $4k$ -val, vagyis egy 4-gyel osztható számmal csökken mindig a táblán lévő számok összege. Ez azt is jelenti, hogy az egész esemény során a táblán lévő számok összegének 4-es maradéka nem változik. Az elején az összeg:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2008 = \frac{1 + 2008}{2} \cdot 2008 = 2009 \cdot 1004,$$

ami egy 4-gyel osztható szám, hisz 1004 osztható 4-gyel. Így a végén nem lehet egy darab 1-es a táblán, mert akkor az „összeg” 4-es maradéka 1 lenne.



Országos döntő

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páratlan?

$9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ ilyen háromjegyű szám van. Az első jegy (százask helye) nem lehet 0. Így, a százask helyére 9 számjegy közül választhatunk. A második jegy lehet nulla is, tehát itt 10 számjegy közül választhatunk. Ha eddig páros sok páros számjegyet választottunk, akkor az utolsó jegy 0, 2, 4, 6 vagy 8 lehet. Ha eddig páratlan sok páros számjegyet választottunk, akkor az utolsó jegy 1, 3, 5, 7 vagy 9 lehet. Mivel mindkét esetben 5 lehetőség van, így összesen $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ lehetőség van.



2. Hány részre osztják a teret egy kocka lapjai által meghatározott síkok?

Első megoldás: A kocka minden lapjához, éléhez és csúcsához csatlakozik kívülről egy térrész, illetve van a kocka belseje. Így összesen $6 + 12 + 8 + 1 = 27$ részt határoznak meg a lapsíkok.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Második megoldás: Két szemközti oldal síkja 3 „emeletre” bontja a teret és minden szinten az ábrán látható 9 rész keletkezik. Minden szinten az itt látható síkrészeknek megfelel egy térrész. Ez viszont is igaz, minden térrésznek megfelel valamelyik „emeleten” egy síkrész. Ebből következik, hogy $3 \cdot 9 = 27$ térrészt kapunk.

Harmadik megoldás: Ha Rubik-kocka középső (nem látható) kiskockájának lapsíkjaait vesszük, akkor a $3 \times 3 \times 3$ kiskockából minden létrejövő térrészbe pontosan 1 kiskocka kerül. 

3. Hányféleképpen lehet felváltani egy 1000 Ft-ost 100, 200 és 500 Ft-osokra (nem kell mindegyik címletet felhasználni)?

Az 500 Ft-osok száma szerint könnyen összeszámolhatjuk az eseteket. $1000 = 500 + 500$. Ha csak 1 darab 500-ast használunk, akkor $1000 = 500 + 2 \times 200 + 100 = 500 + 200 + 3 \times 100 = 500 + 5 \times 100$. Ha pedig nem használunk 500-ast, akkor a 200-asok száma szerint: $1000 = 5 \times 200 = 4 \times 200 + 2 \times 100 = 3 \times 200 + 4 \times 100 = 2 \times 200 + 6 \times 100 = 1 \times 200 + 8 \times 100 = 10 \times 100$. Ez összesen 10 lehetőség. 

4. Egy évben legfeljebb hány olyan hónap lehet, amelyben öt vasárnap van?

Hét egymást követő nap között pontosan 1 vasárnap van. Minden hónapban legalább 4 vasárnap van, mert $4 \cdot 7 = 28$, és minden hónapban legfeljebb 5 vasárnap lehet, mivel $5 \cdot 7 = 35 > 31$. Minden évben legalább 52 vasárnap van, mivel $52 \cdot 7 = 364 < 365$. És minden évben legfeljebb 53 vasárnap lehet, mert $53 \cdot 7 = 371 > 366$. $12 \cdot 4 + 4 = 52$, illetve $12 \cdot 4 + 5 = 53$, azaz egy évben 4 vagy 5 hónapban lehet öt vasárnap. 

Országos döntő

1. Számítsuk ki az összes tízes számrendszerbeli háromjegyű szám számjegyeinek összegét!

Első megoldás: Párokba rendezzük a számokat:

$$\{100, 999\}, \{101, 998\}, \{102, 997\}, \dots, \{549, 550\}.$$

Minden párban a számjegyek összege 28, és mivel 450 pár van, a háromjegyű számok számjegyeinek összege $450 \cdot 28 = 12600$.

Második megoldás: Összeszámolhatjuk helyiértékenként is. Nézzük meg, hogy például az 5-ös számjegy hányszor fog szerepelni az egyes vagy a százask helyiértékeken? Az első számjegy $10 \cdot 10 = 100$ -szor lesz öt. Az utolsó számjegy $9 \cdot 10 = 90$ -szer lesz öt. Innét az összegre $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot 100 + (0 + 1 + \dots + 9) \cdot 90 + (0 + 1 + \dots + 9) \cdot 90 = 12600$ adódik. 

2. Hányféleképpen lehet a kocka lapjait pirosra és kékre festeni, ha két kifestést nem tekintünk különbözőnek, ha azok egymásba forgathatók?

Számoljuk össze a kék lapok száma szerint. 6 kék lap egyféleképpen lehet. 5 kék és 1 piros lap

esetén a piros lapot hat közül választhatjuk ki. De ezek elforgatással mind egymásba vihetőek, azaz ez is egy eset. 4 kék és 2 piros lap esetén, a 2 piros lap lehet egymás mellett, illetve egymással szemben. Ez két lehetőség. 3 kék és 3 piros lap esetén ha a 3 piros lap között nincs két szemközti, akkor a 3 piros lap a kocka egy csúcsánál találkozó szomszédos lap. Ha van köztük két szemben lévő, akkor a maradék egy pirosat akárhogyan is választva meg, ezek is egymásba forgathatóak lesznek. Innen is van tehát két lehetőség. A maradék esetek száma a szimmetria miatt megegyezik az eddigiekkel. Például a 2 kék és 4 piros lap esete megegyezik a 4 kék és 2 piros lap esetével. Tehát összesen $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ lehetőség van. 

3. Számítsuk ki a következő összeget:

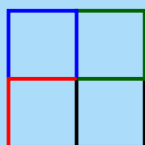
$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + \dots + 2006 - 2007 - 2008 + 2009.$$

Tegyük be zárójeleket:

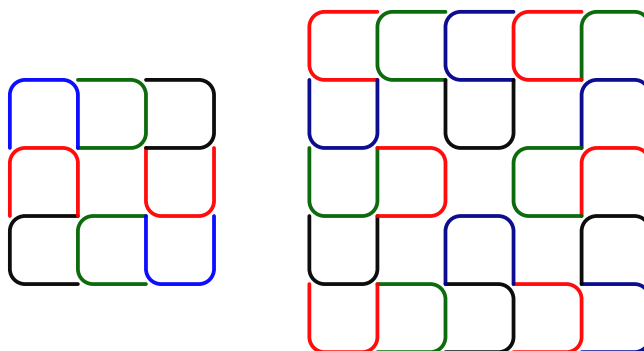
$$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + (10 - 11 - 12 + 13) + \dots + (2006 - 2007 - 2008 + 2009).$$

Egy zárójelen belül a számok összege nulla, azaz a keresett összeg 1. 

4. Érdekes, hogy  alakú „keretekből” (három 1 hosszúságú szakasz „U” alakban) össze lehet állítani négyzetrácsot. Például 2×2 -es négyzetrácsot így:



Mutassuk meg, hogy 3×3 -as és 5×5 -ös négyzetrácsot is össze lehet állítani ilyen keretekből!



Az ábrán láthatóak a megoldások. Az „U” alakok sarkait lekerekítettük, hogy jobban látszódjanak. 

Országos döntő

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzata 5040?

Tudjuk, hogy

$$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Azt szeretnénk, hogy minél kevesebb számjegye legyen a számunknak, így minél több prímtényezőzt kell összevonni úgy, hogy a szorzat még számjegy maradjon. Az 5 és a 7 nem vonható össze semmivel, hiszen már 2-vel szorozva sem kapunk számjegyet. Összesen 4 összevonási lehetőség van: $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$. Ha három darab 2-est vonunk össze, akkor kettővel lesz kevesebb jegyünk, a másik három lehetséges összevonás egy-egy csökkenést jelent a jegyek számában. Mivel az 5 és a 7 biztosan a szám számjegyei lesznek, ezért a négy darab 2-esből és két darab 3-asból kell minél kevesebb, azon belül pedig minél kisebb számjegyeket gyártani. Legalább 3 számjegy lesz belőlük, és akkor járunk a legjobban, ha ezek a 2, 8 és a 9. A legkisebb ilyen szám tehát a 25789.



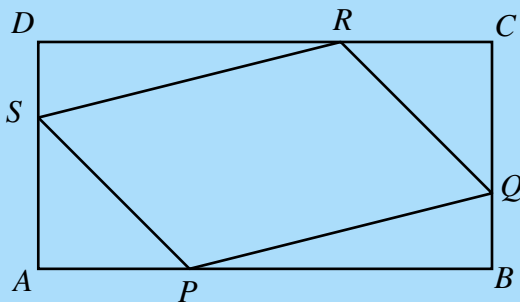
2. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros?

Első megoldás: Párba állíthatjuk a négyjegyű számokat: 1000 – 1001, 1002 – 1003, 1004 – 1005, ..., 9998 – 9999. Minden párban az egyik számban páros a számjegyek összege, a másikban páratlan. Mégpedig azért, mert az első 3 számjegyük mindig megegyezik, az utolsó pedig az egyik számban páros a másikban páratlan. Így pontosan a számok felében lesz a jegyek összege páros, vagyis 4500 ilyen szám van.

Második megoldás: A szám első számjegye 9-féle lehet, hiszen 0 nem állhat az első helyen. A második és a harmadik számjegy 10-féle lehet, hiszen bármi állhat ott. Ha az első három számjegy összege páros, akkor az utolsó számjegy a 0, 2, 4, 6, 8 valamelyike kell, hogy legyen. Ha páratlan, akkor pedig az 1, 3, 5, 7, 9 valamelyike. Mindkét esetben 5 lehetőség van, vagyis összesen $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ ilyen szám van.



3. Az $ABCD$ téglalap oldalain felvettük a P, Q, R, S harmadoló pontokat. Az $ABCD$ téglalap területének hányad része a $PQRS$ négyszög területe?



Legyen $AB = a$ és $AD = b$. Tekintsük az APS háromszöget. Ennek AP alapja harmada az AB oldalnak, vagyis $AP = \frac{a}{3}$. Az AS magassága pedig kétharmada az AD oldalnak, vagyis $AS = \frac{2}{3}b$. Így az APS háromszög területe: $\frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{3}b}{2} = \frac{1}{9}ab$. Hasonló módon a PBQ , QCR és RDS háromszögekről is belátható, hogy a területük kilencede a téglalap területének. Így a megmaradó paralelogramma területe $\frac{5}{9}$ -e a téglalap területének.



4. Egy anyának és két lányának az életkora egy prímszám három különböző hatványa. Hány éves az anya és két lánya most, ha tudjuk, hogy egy évvel ezelőtt mindhármuk életkora prímszám volt?

Az a prím, aminek a különböző hatványai az életkorok, nem lehet páratlan. Ha az lenne, akkor egy évvel korábban az életkorok mind párosak lettek volna, de ez 3 különböző páros szám lenne, ami nem lehet mind prím. Így tudjuk, hogy a 2 hatványairól van szó. Amik életkorként szóba jönnek, azok az 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Ezeket az életkorokat feltételezve tavaly 0, 1, 3, 7, 15, 31,

63 évesek lehettek volna. Ebben a sorozatban 3 prím van összesen: 3, 7, 31. Így az anya 32, a két lány pedig 8 és 4 évesek most.

Megjegyzés. Elvileg elképzelhető egy 128 éves anya is, hiszen 127 prímszám. Ekkor azonban lenne egy legfeljebb 8 éves lánya, és az már nagyon nehezen képzelhető el, hogy egy 120 éves nőnek gyermeke születik.



Országos döntő

1. Keressünk minél nagyobb olyan tízes számrendszerben felírt számot, amelyre igaz a következő tulajdonság: a két szélső számjegy kivételével minden számjegyének kétszerese kisebb, mint a vele szomszédos két számjegy összege (pl.: 743347 ilyen szám).

Egy ilyen számban egy ideig csökkennek a számjegyek értékei, aztán lehet két azonos számjegy, majd ismét növekedni kezdenek az értékek. Ha a legkisebb jegy a , annak a szomszédja $x + a$, a következő pedig $x + a + b$, akkor a feltétel azt mondja, hogy $2x + 2a < 2x + a + b$, amiből következik, hogy $a < b$. Vagyis a legkisebb számtól nézve a különbségek nőnek. Ha x a legkisebb számjegy, akkor a nagyobb szomszédja legalább $x + 1$, ennek szomszédja legalább $x + 1 + 2$ stb., és akkor $x + 1 + 2 + 3 + 4$ már nem lehet számjegy. Vagyis a szám legfeljebb 8-jegyű. A legnagyobb ilyen számot a fentiek alapján könnyen megkaphatjuk: 96433469.



2. Peti azt javasolja a Nemzeti Banknak, hogy a bevont 1 és 2 forintosok helyett vezessék be a 3 forintost, mert így minden 7 Ft-nál nagyobb egész forintot ki lehetne fizetni akár 3 és 5 forintokkal is, nem kellene kerekíteni. Igaza van-e Petinek?

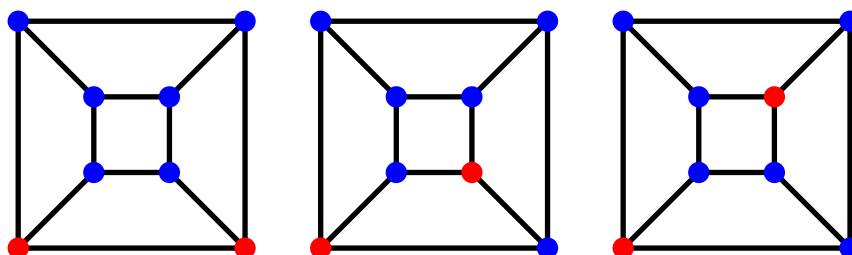
Igen, igaza van. 8 forintot ki tudunk fizetni, hiszen $5 + 3 = 8$. Hasonlóan a 9 és a 10 forint is kifizethető: $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$. Ha 8 kifizethető, akkor 11, 14, 17, ... is kifizethető (ezek a 3-mal osztva 2 maradékot adó számok), hiszen minden lépésben egy 3 Ft-ossal többet adunk, mint korábban. Hasonlóan a 9, 12, 15, ... (3-mal osztható számok) és a 10, 13, 16, ... (3-mal osztva 1 maradékot adó számok) is kifizethetők. Ez viszont az összes 7-nél nagyobb egész számot jelenti.



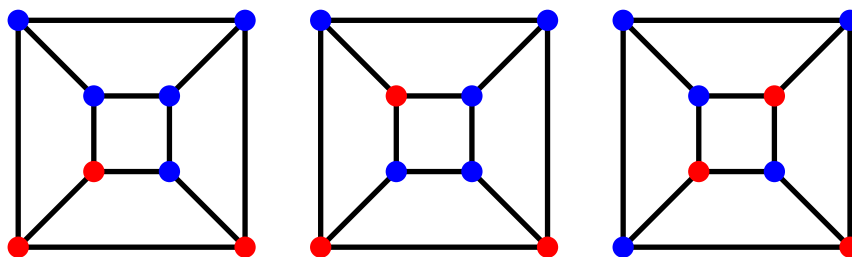
3. Egy kocka csúcsait pirosra és kékre festhetjük. Hány különböző kifestés lehetséges, ha két kifestést akkor tekintünk azonosnak, ha egymásba forgathatók?

Számoljuk meg a lehetőségeket a piros csúcsok száma szerint.

- Ha nincs piros csúcs, akkor csak egyféle lehet a kocka.
- Ha egy piros csúcs van, akkor is.
- Ha két piros csúcs van, akkor az már háromféle lehet, hiszen a két csúcs lehet egy él két végpontja, egy lapátlő két végpontja, illetve egy testátlő két végpontja.

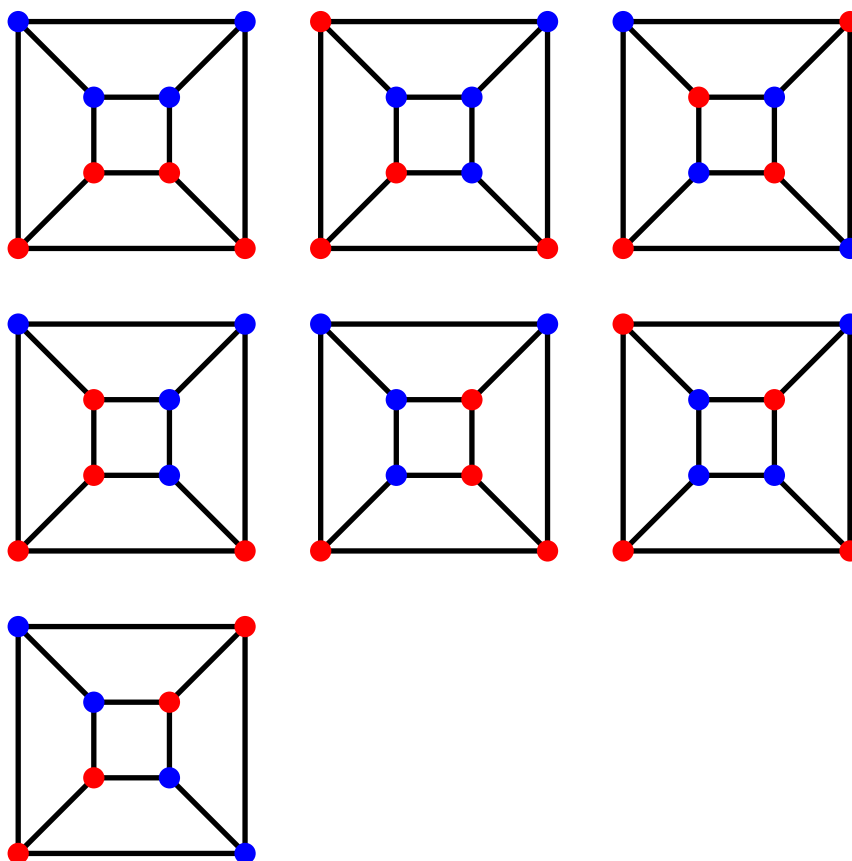


- 3 piros csúcs esetén már nem ennyire egyszerű a helyzet. Itt az alábbi esetek lehetségesek:



egy lap 3 csúcsa piros vagy van két élszomszédos csúcs és egy olyan, ami nem szomszédos a másik kettővel, illetve semelyik kettő piros csúcs sem szomszédos.

- 4 piros csúcs esetén pedig a következő lehetőségek vannak, amiket a piros átellenes csúcspárok (testátló két csúcsa) száma szerint lehet áttekinteni:



Az első sorban az a három eset van, amikor nincs átellenes piros csúcspár. A másodikban, amikor pontosan 1 van, míg a harmadikban, amikor pontosan 2. (A második sor két kockája forgatással nem vihető egymásba, de ha a tükrözés is megengedett lenne, akkor ezek nem lennének különböző esetek.)

Az 5, 6, 7, 8 piros csúcs esetét már tulajdonképpen megszámláltuk, hiszen pl. a 6 piros csúcsú kockából pontosan annyi van, mint a 2 piros csúcsúból, hiszen mindegy, hogy a piros vagy a kék csúcsok szerint számolunk. Így összesen $1 + 1 + 3 + 3 + 7 + 3 + 3 + 1 + 1 = 23$ különböző kocka lehetséges.



4. Hány olyan négyjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amelyben van legalább két egyforma számjegy?

9000 négyjegyű szám van. Ezek közül számoljuk meg azokat, amikben nincs két egyforma számjegy. Ezek száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$, hiszen az első számjegy lehet 9-féle (0 nem lehet). A második is, mert bármi lehet, csak az nem, ami az első, de most már lehet 0 is. A harmadik jegy lehet 8-féle, mert nem lehet az a kettő, ami az első két számjegy, és ugyanígy a negyedik jegy lehet 7-féle. Vagyis összesen $9000 - 4536 = 4464$ ilyen szám van. 

Országos döntő

1. Van-e prímszám a következő alakú tízes számrendszerbeli számok között:

$$121, 11211, 1112111, 111121111, \dots?$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} 121 &= 110 + 11 = 11 \cdot (10 + 1) \\ 11211 &= 11100 + 111 = 111 \cdot (100 + 1) \\ 1112111 &= 1111000 + 1111 = 1111 \cdot (1000 + 1) \end{aligned}$$

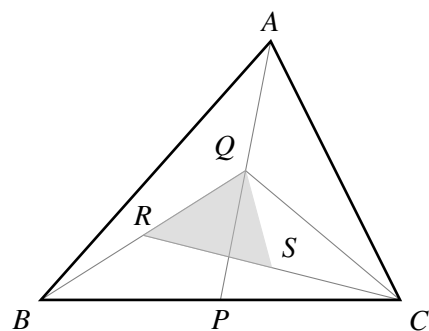
és így tovább. Így a kérdéses számok mindegyike fölírható két, 1-nél nagyobb pozitív egész szám szorzataként, vagyis nem lehet egyikük se prím. 

2. Az ABC háromszögben P a BC oldal, Q a PA szakasz, R a BQ szakasz, végül S a CR szakasz felezőpontja. Az ABC háromszög területe hányszorosa a QRS háromszög területének?

A súlyvonal felezi a háromszög területet. (A súlyvonal az egyik csúcsot köti össze a szemközti oldal felezőpontjával. A keletkező két háromszög alapjaik egyenlőek, magasságaik azonosak.)

Ezt használva látható, hogy a $\overline{QS}$ a QRC háromszög súlyvonala, így $T_{QRC} = 2T_{QRS}$. Ugyanígy a $\overline{CR}$ a CQB háromszög súlyvonala, így $T_{CQB} = 2T_{QRC}$. Másrészt, $T_{ABC} = T_{ABP} + T_{ACP} = 2T_{QBP} + 2T_{QCP} = 2T_{QCB}$, mert a $\overline{BQ}$ és $\overline{CQ}$ rendre az ABP és ACP háromszögek súlyvonalai.

Mindezeket összevetve $T_{ABC} = 2T_{QCB} = 4T_{QRC} = 8T_{QRS}$ adódik, vagyis az ABC háromszög területe 8-szorosa a QRS háromszögének. 



3. Igazoljuk, hogy a 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó előtti számjegy mindig páros ($3^1 = 03$, és $3^2 = 09$).

Először nézzük meg, hogy a 3-hatványok utolsó számjegye mi lehet. Az utolsó számjegy az adott szám 10-es osztási maradéka, és két egész szám 10-es maradékának szorzata ugyanazt a maradékot adja 10-zel osztva, mint a két szám szorzata. Így a 3-hatványok utolsó jegyeinek vizsgálata során a következő 3-hatvány utolsó jegyének kiszámításához elég az előzőét beszorozni

3-mal, és az eredmény utolsó jegyét venni. Emiatt az utolsó jegyek rendre 3, 9, 7, 1 (mert $3 \cdot 9 = 27$, $3 \cdot 7 = 21$). Innen a következő utolsó jegy a 3, és innen a 3, 9, 7, 1 ismétlődik, hiszen ebben a sorozatban az előző elem egyértelműen meghatározza a következőt. Tehát az utolsó jegy csakis 1, 3, 7 vagy 9 lehet.

Azt tudjuk, hogy 3^1 -re teljesül az állítás. Most legyen $3^n = 100a + 10b + c$, ahol a nemnegatív egész, b és c pedig az utolsó két számjegye 3^n -nek (10-es számrendszerbeli alakban). Ha itt n pozitív egész, és már tudjuk, hogy b páros, akkor $3^{n+1} = 300a + 30b + 3c$. Itt az utolsó két számjegyet csak az utolsó két tag határozza meg, hiszen az első osztható 100-zal. A b páros, így $30b = 3b \cdot 10$ utolsó számjegye 0, utolsó előtti pedig páros, hiszen a $3b$ páros. Az utolsó számjegy így a $3c$ utolsó jegye, az utolsó előtti pedig a $3b$ utolsó előtti (páros) jegyének és a $3c$ utolsó előtti jegyének összege, amiből esetleg átváltás miatt le kell vonni a 10 egy többszörösét. De c a 3^{n+1} utolsó jegye, így értéke csakis 1, 3, 7 vagy 9 lehet. Tehát $3c$ lehet 3, 9, 21 vagy 27. Ezek mindegyikének páros az utolsó előtti jegye. A 10 is páros, így végeredményben a 3^{n+1} utolsó előtti jegye is páros.

De $n = 1$ -re már tudtuk, hogy az ehhez tartozó b páros (a 0), így minden n pozitív egészre is igaz az állítás. Tehát valóban, 3^n utolsó előtti számjegye mindig páros. 

4. Az első tíz pozitív egész szám összegében: az $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10$ összegben bármelyik szám előjelét „+”-ról „-”-ra változtathatjuk. Elérhető-e így, hogy az új összeg értéke 20 legyen?

Vegyük észre, hogy az előjelek változtatásával nem változtatható az összeg paritása. Ha ugyanis az összegbe az egyik tagnál a helyett $-a$ -t írunk, akkor az összeg $2a$ -val csökken, és ez páros, vagyis nem változtatja a paritást. Eredetileg az összeg $1 + 2 + \dots + 10 = 55$, ami páratlan, a 20 viszont páros, így nem érhető el a 20. 

5. Hány olyan négyjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amelynek számjegyei pontosan kétféle, 0-tól különböző számjegyből állnak?

Először is határozzuk meg, hányféleképpen választható ki ez a két számjegy. Összesen 9-féle 0-tól különböző számjegy van. A két jegyből az első 9, a másodikat ezután 8-féleképpen választhatjuk ki. Ez $9 \cdot 8 = 72$ -féle lehetőséget adna, de így minden számjegypárt 2-szer számoltunk, mindkét sorrendjében. Tehát összesen $\frac{72}{2} = 36$ -féleképpen választható meg a két jegy. A továbbiakban jelölje ezeket a és b .

Lehet 3 darab a és 1 darab b , 2 darab a -ból és b -ből is, illetve 1 darab a és 3 darab b . Az első és a harmadik esetben is 4-féle lehet a szám, mert annak a jegynek a helyét, melyből csak 1 van, 4-féleképpen választhatjuk meg. (Az első jegyre nem kell külön figyelnünk, hiszen sem a , sem b nem 0.)

A második esetben a 2 darab a jegy helyét akarjuk megválasztani. Az első a -t 4-féle helyre tehetjük, ezután a másodikat 3-félére. Ez $4 \cdot 3 = 12$ lehetőséget adna. De így valójában minden esetet 2-szer számoltunk, mert egy elhelyezésnél a 2 darab a jegyet 2-féleképpen tehetjük sorrendbe. Tehát az elhelyezések száma $\frac{12}{2} = 6$.

Így összesen $36 \cdot (4 + 6 + 4) = 504$ jó szám van. 

Országos döntő

1. András és Bea testvérek. András arra a kérdésre, hogy hány évesek, így válaszolt. Ha a húgom, Bea annyi idős lesz, mint én vagyok most, akkor együtt 35 évesek leszünk. Most én háromszor olyan idős vagyok, mint a húgom volt akkor, amikor én olyan idős voltam, mint a húgom most. Hány éves most András és Bea?

Legyen András és Bea jelenlegi életkora x , illetve y év. Ekkor Bea $x - y$ év múlva lesz annyi idős, mint András most, és ekkorra András $x + (x - y) = 2x - y$ éves lesz. Így az első feltétel szerint

$$(2x - y) + x = 3x - y = 35.$$

András $x - y$ évvel ezelőtt volt olyan idős, mint Bea. Ekkor Bea $y - (x - y) = 2y - x$ éves volt. A második feltétel szerint tehát $x = 3(2y - x) = 6y - 3x$, azaz

$$6y - 4x = 0.$$

Az első egyenletből $y = 3x - 35$. Ezt beírva a második egyenletbe

$$6(3x - 35) - 4x = 0$$

$$14x - 210 = 0$$

$$x = 15.$$

Így $y = 3x - 35 = 10$. Tehát András 15, Bea 10 éves.



2. Egy tízes számrendszerben felírt számról azt mondjuk, hogy szerencsés, ha a számjegyeit két olyan csoportra bonthatjuk, amelyben a számjegyek összege egyenlő. Például 11, 22, 99, 123 szerencsés számok. Melyik az a legkisebb szerencsés szám, amelyre igaz, hogy a nála eggyel nagyobb szám is szerencsés?

Nyilvánvaló, hogy szerencsés szám számjegyeinek összege páros kell, hogy legyen, hiszen két egyenlő egész szám összege. Legyen n és $n + 1$ a két keresett szomszédos szerencsés szám. Ha az $n + 1$ összeadásban k darab (esetleg 0) 10-es átváltás történik, akkor k darab 9-es jegy helyett lesz 0-s, és 1 jegy megnő 1-gyel. Így a számjegyek összege $1 - 9k$ -val nő. Minthogy n és $n + 1$ is szerencsés, ezért mindkettőjük jegyeinek összege páros, így $1 - 9k$ is páros. Ez kizárja a páros k értékeket, vagyis csakis $k = 1$ vagy $k \geq 3$ jöhet szóba.

Ha $k = 1$, akkor $n + 1$ egy 10-zel osztható, de 100-zal nem osztható pozitív egész. Mivel nem számít, hogy az utolsó jegyet, a 0-t melyik számjegycsoportba soroljuk, amikor két, egyenlő összegű csoportra bontjuk az $n + 1$ számjegyeit, ez nem változtatja meg egyik összeget sem, így az ezt elhagyva kapott $a = \frac{n+1}{10}$ szám is szerencsés kell, hogy legyen. Az a nem lehet 0, hiszen $n + 1$ pozitív, és nem lehet egyéb 1-jegyű sem, hiszen ekkor nem lennének a számjegyei a kívánt módon két csoportba oszthatók. Ha pedig 2-jegyű, akkor szükségszerűen a két jegynek egyenlőnek kell lennie.

Az ilyen alakú a -khoz tartozó $n + 1$ -ek nyilván valóban szerencsések lesznek, azt kell ellenőrizni, hogy az n is az lesz-e. Az első néhány ilyen alakú a -ra (11, 22, 33, 44, 55) fölírva a hozzájuk tartozó n -eket: 109, 219, 329, 439, 549. Ezek közül csak az 549 szerencsés ($5 + 4 = 9$), így a $k = 1$ esetben ez a legkisebb jó n .

Ha pedig $k \geq 3$ lenne, akkor $n + 1$ -nek 1000-rel oszthatónak kellene lennie, vagyis $n \geq 999$ lenne, így nem kaphatunk kisebb n -et, mint az 549.

Tehát a legkisebb jó n az 549.



3. Jelöljön A egy 2008 jegyből álló, 9-cel osztható számot. Legyen B az A számjegyeinek összege, C a B számjegyeinek összege, végül D a C számjegyeinek összege. Határozzuk meg D értékét!

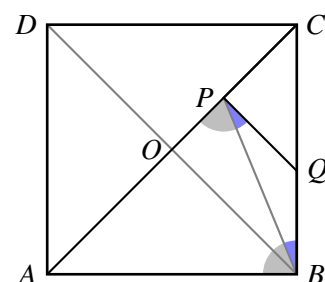
Egy szám jegyei összegének 9-es osztási maradéka egyenlő magának a számnak a 9-es maradékával. Így abból, hogy A osztható 9-cel, rögtön adódik, hogy B, C és végül D is osztható 9-cel. Az is könnyen látható, hogy pozitív egész számjegyeinek összege is pozitív egész, így $D \geq 9$. Mivel A egy 2008-jegyű szám, így $B \leq 2008 \cdot 9 = 18072$, vagyis B legfeljebb 5-jegyű. Így $C \leq 5 \cdot 9 = 45$. Így $D \leq 4 + 9 = 13$. De D osztható 9-cel, így $D \leq 9$. Ugyanakkor már tudjuk, hogy $D \geq 9$, így csak $D = 9$ lehet. 

4. Az $ABCD$ négyzet AC átlóján lévő P pontra igaz, hogy $AP = AB$. A BC oldalon lévő Q pontra igaz, hogy PQ merőleges AC -re. Igazoljuk, hogy a PC, PQ, BQ szakaszok egyenlők!

A $CAB \sphericalangle$ a négyzet szimmetriái miatt a $DAB \sphericalangle$ fele, vagyis 45° . Az APB háromszög egyenlőszárú ($\overline{AP} = \overline{AB}$), így az $APB \sphericalangle = ABP \sphericalangle = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$. Ebből azonnal következik, hogy $ABP \sphericalangle > 45^\circ = ABD \sphericalangle$, ezért ha O az AC és BD átlók felezőpontja, akkor P az $\overline{OC}$ szakaszon van. Innen pedig rögtön adódik, hogy OB és AC merőlegessége miatt van jó Q a $\overline{BC}$ szakaszon (a Q nem az oldalegyenes külső részén van).

Így a $PCQ \sphericalangle = 45^\circ$ -ből és $QPC \sphericalangle = 90^\circ$ -ből $CQP \sphericalangle = 45^\circ$ adódik. Így a QPC háromszög egyenlőszárú, $\overline{PQ} = \overline{PC}$. Emellett $BQP \sphericalangle = 180^\circ - CQP \sphericalangle = 135^\circ$ -ből és $QBP \sphericalangle = 90^\circ - ABP \sphericalangle = 22,5^\circ$ -ből $BPQ \sphericalangle = 180^\circ - 135^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ$ következik, vagyis a BQP háromszög egyenlőszárú, $\overline{QB} = \overline{QP}$.

Ezt a két kapott egyenlőséget összevetve rögtön adódik, hogy $\overline{PC} = \overline{PQ} = \overline{BQ}$, és ezt akartuk bizonyítani. 



Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy ha két pozitív egész szám összege 2310, akkor a két szám szorzata nem osztható 2310-zel!

Indirekten bizonyítjuk az állítást: tegyük fel, hogy a és b olyan pozitív egészek, amikre $a + b = 2310$ és $a \cdot b = 2310 \cdot k$, ahol k egy pozitív egész szám. 2310 prímtényezői felbontása $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Megfigyelhetjük, hogy minden prím első hatványon szerepel. Mivel $a \cdot b = 2310 \cdot k$, ebből következik, hogy ha p prím, és $p \mid 2310$, akkor $p \mid b$, vagy $p \mid a$ teljesül. Ha $p \mid a$, akkor $b = 2310 - a$ miatt p osztja b -t is, mert ha két szám mindegyike osztható p -vel, akkor a különbségük is. Hasonlóan $p \mid b$ -ből következik, hogy $p \mid a$. Tehát a 2, 3, 5, 7, 11 prímelek osztják a -t és b -t is, ami azt jelenti, hogy $a, b \geq 2310$, ami ellentmond $a + b = 2310$ -nek. 

2. Azt mondjuk, hogy a 8, 9 szomszédos számokból álló számpár érdekes, mert $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, azaz mindkét szám prímtényezői legalább második hatványon szerepelnek. Keress még legalább egy ilyen érdekes számpárt!

Keressünk egy ilyen számpárt $(x^2 - 1, x^2)$ alakban! x^2 -ben minden prím páros kitevőn szerepel x -től függetlenül, ezért elég azzal foglalkoznunk, hogy $x^2 - 1$ eleget tegyen a feltételnek.

Alakítsunk szorzattá: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Foglalkozzunk csak páratlan x -ekkel: ekkor $x - 1$ és $x + 1$ is páros, tehát a 2 kitevőjével már nem kell törődnünk, mert az már legalább 2 lesz. Keressünk páratlan x -et úgy, hogy $(\frac{x-1}{2}, \frac{x+1}{2})$ is olyanok legyenek, hogy minden prím kitevője legalább második hatványon szerepel. Ez pont azt jelenti, hogy $(\frac{x-1}{2}, \frac{x+1}{2})$ számpár érdekes, mert a különbségük 1. De egy ilyen már ismerünk: $(8, 9)$, ezt használva tehát megválaszthatjuk jól x -et ($x = 17$), és így kapjuk a $(288, 289)$ érdekes számpárt.

Megjegyzés. Ezt az eljárást folytatva találhatunk végtelen sok megfelelő számpárt.



3. Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 1. Az AB oldalon felveszünk egy P pontot, az AD -n pedig egy Q pontot úgy, hogy az APQ háromszög kerülete 2 egység legyen. Igazoljuk, hogy $\angle PCQ = 45^\circ$!

Legyen S olyan pontja a PQ szakasznak, amire $PB = PS$. Mivel $AQ + QS + SP + PA = 2 = AD + AB$, ezért szükségszerűen $SQ = QD$. Így SQD és SPB háromszögek egyenlőszárúak. Legyen $\angle APB = \alpha$ és $\angle AQB = \beta$. AQP háromszög derékszögű, ezért $\alpha + \beta = 90^\circ$. Számoljuk ki SQD és SPB szárszögeit: $\angle QDS + \angle QSD = \beta$, azaz $\angle QDS = \angle QSD = \frac{\beta}{2}$, és hasonlóan $\angle PSB + \angle PBS = \frac{\alpha}{2}$. Megmutatjuk, hogy CS szakasz merőleges PQ szakaszra: tegyük fel, hogy nem merőleges, és legyen ekkor S' a C -ből a PQ -ra bocsátott merőleges talppontja.

Ha $S'C < 1$, akkor $PS' > PB$, mert a Pitagorasz-tételből: $CS'^2 + PS'^2 = PC^2 = CB^2 + PB^2$, azaz $CS'^2 = 1 + PB^2 - PS'^2$, hasonlóan $QS' > QD$. Ez viszont nem lehetséges, mert $PS' + QS' = QD + PB$.

Hasonlóan belátható, hogy $CS' > 1$ sem teljesülhet, ezért $CS' = 1$.

Ha $CS' = 1$, akkor $PS'C$ és PBC egybevágó háromszögek (mindkettő derékszögű, az átfogójuk azonos, és az egyik befogójuk hossza azonos), ami azt jelenti, hogy $PS' = PB$, tehát $S = S'$.

Ezt a merőlegességet felhasználva már könnyen kiszámolhatjuk a $\angle QCP$ szöveget: az előző gondolatmenetből az is kiderült, hogy $SC = 1$, speciálisan PSC és PBC egybevágók, és szimmetrikusak PC -re, azaz $PSCB$ négyszög deltoid. Innen kapjuk, hogy BS merőleges PC -re, tehát $\angle PBS = \angle PCB$, és hasonlóan $\angle QDS = \angle QCD$. Tehát

$$\angle QCP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 45^\circ.$$



4. Egy sorozat első két tagja: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ és minden további tag a két szomszédjának szorzatánál eggyel kisebb. Számítsuk ki a sorozat első 560 tagjának összegét!

Ha ismerjük a sorozat i -edik és $(i + 1)$ -edik tagját, akkor egyértelműen meg tudjuk határozni az $(i + 2)$ -ediket: $a_i \cdot a_{i+2} - 1 = a_{i+1}$, amit átrendezve:

$$a_{i+2} = \frac{a_{i+1} + 1}{a_i}.$$

Így kiszámolhatjuk a sorozat első néhány tagját:

$$2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, \dots$$

Innen észrevehetjük, hogy a sorozat periodikus, és ezt könnyen be is láthatjuk: a sorozat egy elemét meghatározza a megelőző két elem, tehát ha találunk két szomszédos elempárt, ami egyszer már

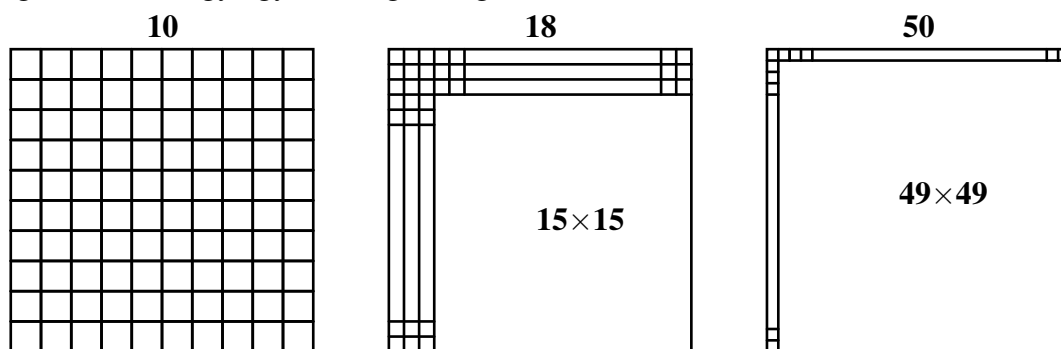
szerepelt (mint szomszédos elempár), akkor az már bizonyítja a periodikusságot. Ilyen ismétlődő pár a 2, 3. Tehát a sorozat periodikus, egy periódusa öt hosszúságú, és a következőkből áll: 2, 3, 2, 1, 1. Az első 560 tagban $\frac{560}{5} = 112$ ilyen ötös szerepel, és egy-egy periódusban a tagok összege 9. Tehát az első 560 tag összege $9 \cdot 112 = 1008$. 

5. Egy egész oldalhosszúságú négyzetet feldaraboltunk 100 (nem feltétlenül egybevágó) négyzetre. Ezek közül 99-nek a területe 1 területegység. Mennyi lehet a századik négyzet területe? Megvalósítható-e a kapott eredmény?

Legyen a feldarabolt négyzet oldalhossza a , a századik négyzeté b . Ezekre a következőt írhatjuk fel: $99 + b^2 = a^2$. Átrendezve és szorzattá alakítva: $99 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. 99 prímtényezős felbontása $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, és $a + b > a - b$, ezért csak a következő 3 eset lehetséges:

- (a) $a - b = 1, a + b = 99$
- (b) $a - b = 3, a + b = 33$
- (c) $a - b = 9, a + b = 11$

Ezekből pedig a következő (a, b) megoldások adódnak: $(50, 49)$, $(18, 15)$, $(10, 1)$. Ezek mindegyike megvalósítható, egy-egy lehetséges megvalósítást mutatnak az alábbi ábrák:



Országos döntő

1. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre igaz, hogy $4p - 1$ négyzetszám?

Vizsgáljuk meg a négyzetszámok lehetséges 4-gyel való osztási maradékait.

Ha n páros, akkor n^2 osztható 4-gyel.

Ha n páratlan, akkor $2k + 1$ alakú, így a négyzete

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

alakú. Tehát egyetlen négyzetszám sem adhat 4-gyel osztva 3 maradékot. $4p - 1$ 3 maradékot ad, ezért semmilyen prímre nem lehet négyzetszám. 

2. Számítsuk ki egy háromszög és a súlyvonaláiból szerkesztett háromszög területének arányát!

Az ABC háromszög oldalfelezőpontjai legyenek rendre F, G, H , és a háromszöget tükrözzük F -re. C, G, H tükörképe legyen rendre C', G', H' . Ekkor az $AC'BC$ négyszög paralelogramma.

Lássuk be, hogy AGH' az ABC háromszög súlyvonalából szerkesztett háromszöggel egybevágó. Ehhez elég, hogy három oldala a három súlyvonallal egyenlő hosszú.

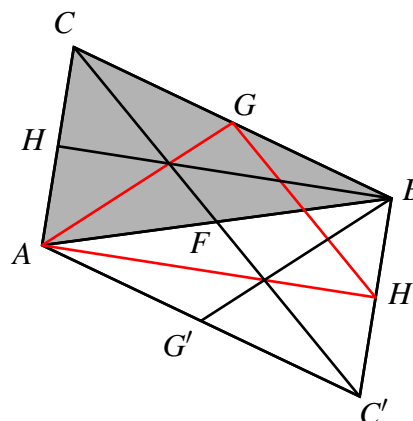
AG egy súlyvonal. $AH' = BH$ mert egymás tükörképei. $GH' = CF$, mert GH' a CBC' háromszög középvonala. $CC' = 2CF$, és a háromszög középvonala mindig fele olyan hosszú, mint a hozzá tartozó oldal.

Tehát a kérdés, hogy mennyi az ABC és AGH' háromszög területének aránya. Legyen az ABC háromszög területe egy egység. Ekkor a paralelogramma területe két egység. A paralelogramma területéből levonva az AGC , $GH'B$, $AH'C'$ háromszögek területét kapjuk az AGH' háromszög keresett területét.

Egy háromszög súlyvonala mindig felezi a területet, míg a középvonalak négy egyenlő területű háromszögre osztják a háromszöget. BCC' háromszög területe is egy egység, mert a paralelogramma területének fele, hiszen a paralelogramma területét mindkét átlója felezi.

Az AGC és $AH'C'$ háromszögek területe tehát $\frac{1}{2}$ egység, míg BGH' területe $\frac{1}{4}$. Így AGH' területe $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Tetszőleges háromszög esetén tehát a háromszög és a súlyvonalából szerkesztett háromszög területének aránya $1 : \frac{3}{4} = 4 : 3$. 



3. Ábrázoljuk a következő függvényt a $[-2; 4]$ intervallumon:

$$f(x) = ||x - 1| - |x - 3||.$$

Válasszuk szét az eseteket aszerint, hogy a két abszolút értékben szereplő kifejezés negatív, vagy nemnegatív.

$x - 1$ az 1-nél, míg $x - 3$ a 3-nál vált előjelet. Tehát csak előjelek tekintetében 3 eset van. A kifejezések átalakításánál azt használjuk, hogy negatív szám abszolút értéke az ellentettje, míg nemnegatívé önmaga.

- Ha $x < 1$, ekkor $x - 1$ és $x - 3$ negatív, ezért

$$f(x) = |-(x - 1) - (-(x - 3))| = |-x + 1 + x - 3| = |-2| = 2.$$

- Ha $1 \leq x < 3$, ekkor $x - 1$ nemnegatív és $x - 3$ negatív, ezért

$$f(x) = |x - 1 - (-(x - 3))| = |x - 1 + x - 3| = |2x - 4|.$$

- Ha $x \geq 3$, ekkor $x - 1$ és $x - 3$ nemnegatív, ezért

$$f(x) = |x - 1 - (x - 3)| = 2.$$

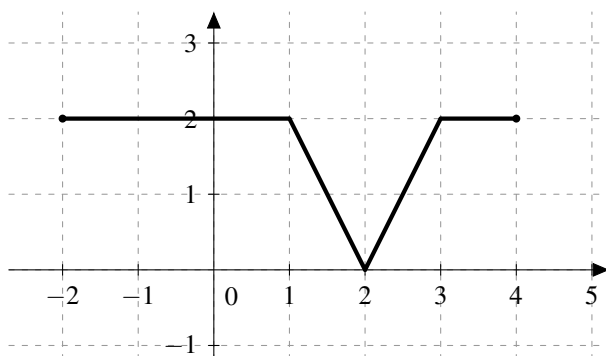
Még meg kell vizsgálni, hogy a $[1; 3[$ intervallumon hogy néz ki az $f(x) = |2x - 4|$ függvény. Ez az $x = 2$ helyen vált előjelet.

$x < 2$ esetén $f(x) = -2x + 4$,

$x \geq 2$ esetén $f(x) = 2x - 4$.

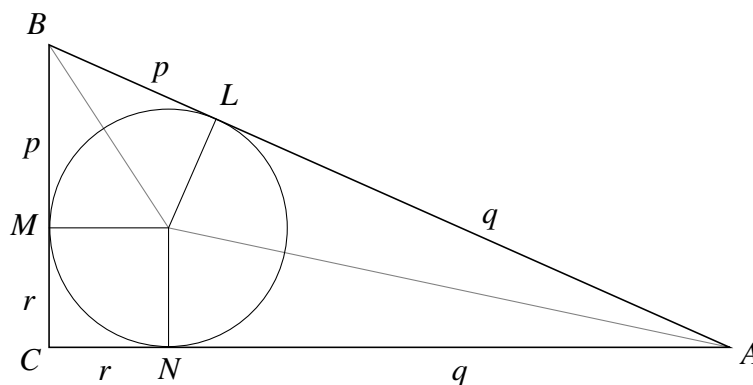
Ezek alapján már tudjuk ábrázolni a függvényt, mert minden szakaszon konstans, vagy lineáris.

- A $[-2; 1[$ intervallumon konstans 2.
- A $[1; 2[$ intervallumon $-2x + 4$.
- A $[2; 3[$ intervallumon $2x - 4$.
- A $[3; 4]$ intervallumon konstans 2.



4. A derékszögű háromszögbe írt kör átfogóra illeszkedő érintési pontja két részre osztja az átfogót. Igazoljuk, hogy e két szakasz hosszának szorzata a háromszög területével egyenlő!

Az ABC derékszögű háromszög beírt körének középpontja legyen K , az érintési pontok legyenek rendre L, M, N . Egy körhöz külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő, ezért $BL = BM = p$, $LA = AN = q$. T jelölje a háromszög területét, r a beírt kör sugarát.



Az érintési pontokhoz húzott sugarak merőlegesek az oldalakra, ezért $KMCN$ egy r oldalú négyzet. A befogók szorzata a háromszög területének kétszerese, ezért

$$(p + r)(r + q) = 2T = pq + r^2 + pr + rq.$$

Elég belátni, hogy $r^2 + pr + rq = T$, ebből a fentiek alapján $T = pq$.

Az ABC háromszög feldarabolható a $KMCN$ négyzetre és a LBK , BMK , KNA , ALK derékszögű háromszögekre, ezért területe

$$r^2 + \frac{pr}{2} + \frac{pr}{2} + \frac{qr}{2} + \frac{qr}{2} = r^2 + pr + rq,$$

amit éppen be akartunk látni. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.



XXXVIII. VERSENY 2008–09.

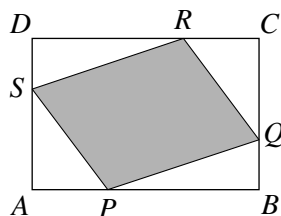
FELADATOK

Megyei forduló

1. Hány olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros? (A 0 is páros!) ➡
2. Számozzuk meg a kocka csúcsait az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokkal úgy, hogy bármelyik lapon ugyanannyi legyen a számok összege, mint a szemközti lapon. ➡
3. Bontsunk fel egy négyzetet egyenes szakaszokkal 8 háromszögre úgy, hogy mindegyik háromszög pontosan három másik háromszöggel legyen szomszédos. (Két háromszög akkor szomszédos, ha szakaszban érintkeznek. Csak közös csúccsal rendelkező háromszögek nem szomszédosak.) ➡
4. Bontsuk fel egy kocka mind a 6 lapját két-két téglalpra úgy, hogy mindegyik téglalap 5 másikkal legyen egy oldalban vagy oldalának egy szakaszában határos! ➡

Megyei forduló

1. Mutassuk meg, hogy
$$11111112222222 - 3333333$$
egy pozitív egész szám négyzete! ➡
2. Az $ABCD$ téglalap megfelelő oldalainak harmadoló pontjai a P, Q, R, S pontok. Hányad része az $ABCD$ téglalap területének a $PQRS$ paralelogramma területe?



3. Állítsuk elő a 110-et olyan pozitív egész számok összegeként, amelyekre igaz, hogy a reciprokuk összege 1 (például 3 reciproka $\frac{1}{3}$). ➡
4. Egy háromszög és egy négyszög kerületének lehet-e 4, 5, 6, 7 és 8 közös pontja? (Adjunk példákat!) ➡

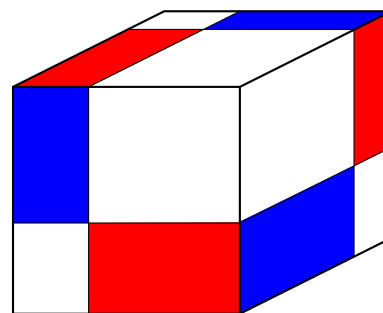
Megyei forduló

1. Számítsuk ki a tízes számrendszerbeli háromjegyű számok számjegyeinek összegét! ➔
2. A kert egy bizonyos részét az apa 2 óra alatt, a nagyobbik fia 3 óra alatt, a kisebbik fia 6 óra alatt ássa fel egyedül. Mennyi idő alatt ássák fel a kertnek azt a részét, ha mindhárman együtt dolgoznak? ➔
3. Egy téglalapot az ábrán látható módon négy téglalapra bontottunk. Három téglalapba beleírtuk a területét, a negyedik téglalap területe x . Számítsuk ki x értékét! ➔
4. Kiválasztottunk két tízes számrendszerbeli kétjegyű számot. Tudjuk, hogy a többi (ki nem választott) kétjegyű szám összege éppen 50-szerese az egyik kiválasztott számnak. Melyik két számot választottuk ki? ➔
5. Az e egyenes merőleges az ABC derékszögű háromszög AB átfogójára, a BC befogó egyenesét D -ben, az AC befogó egyenesét E -ben metszi. Mekkora szöget zár be az AD és BE egyenes? ➔

2	3
x	4

Megyei forduló

1. A 100-tól 200-ig terjedő pozitív egész számok mindegyikének összeszorozzuk a számjegyeit, és a kapott szorzatokat összeadjuk. Mennyi lesz az összeg? ➔
2. Mutassuk meg, hogy bármely háromszög feldarabolható egyenlőszárú háromszögekre! ➔
3. Melyik lehet az a pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy a nála 1-gyel kisebb szám pozitív osztói közül 3 különbözőnek az összege? ➔
4. Egy kockát három olyan síkkal metszünk, amelyek párhuzamosak 2–2 oldallappal az ábrán látható módon. Igazoljuk, hogy a piros téglalapok területének összege egyenlő a kék téglalapok területének összegével! ➔
5. Néhány ládában összesen 36 tonna áru van. Mindegyik láda súlya legfeljebb 1 tonna. Igazoljuk, hogy egy 4 tonna teherbírású teherautóval legfeljebb 11 fordulóval az összes láda elszállítható, de 11-nél kevesebb fordulóval nem feltétlenül! ➔



Országos döntő

1. Jelöljük meg a (8×8) -as sakktáblán 16 mező középpontját úgy, hogy semelyik 3 megjelölt pont ne essen egy egyenesbe! 
2. A tízes számrendszerben felírt kétjegyű pozitív egész számoknak leírtuk a számjegyeik összegét (pl. 18-ból $1 + 8 = 9$ -et kaptuk). Sorold fel, melyik számot hányszor kaptuk így meg. 
3. Adott egy 27×34 mezőből álló négyzetrácsos lemez, ebből kell minél több 1×5 -ös lapot kivágni. Hány ilyen lapot tudunk készíteni? 
4. Valamelyik évben 3 egymást követő hónapban összesen 12 hétfő volt. Mutassuk meg, hogy a három hónap között ott van a február! 

Országos döntő

1. Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, ami nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel? 
2. Egy négyzet egy belső pontja a négyzet egyik oldalától 6 cm, a másiktól 7 cm, a harmadiktól 8 cm és a negyediktől 9 cm távolságra van. Mekkora a négyzet oldala? 
3. Az 5. osztályban 7-tel kevesebb fiú van, mint lány. Ebből az osztályból egy fiú azt állítja, hogy kétszer annyi lány osztálytársa van, mint fiú. Hányan járnak ebbe az osztályba? 
4. A 90 és 91 érdekes tulajdonságú számpár. Az első számjegyeinek összegét a második számhoz adva 100-at kapunk, és fordítva, a második számjegyeinek összegét az elsőhöz adva is 100-at kapunk. Keressük meg az összes ilyen tulajdonságú kétjegyű számpárt! 

Országos döntő

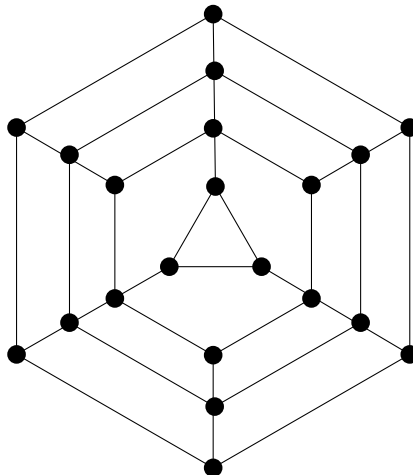
1. Azt a feladatot kaptuk, hogy egy tojást pontosan 4 percig főzzünk. Rendelkezésünkre áll egy 3 perces és egy 5 perces homokóra, más időmérő eszköz azonban nincs. Hogyan oldjuk meg a feladatot? 
2. Fel lehet-e darabolni egy konvex 17-szöget 14 háromszögre? 
3. Számítsuk ki minél egyszerűbben!

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{101}\right)$$

4. Egy 27×34 -es négyzethálós lapunk van. Ebből minél több 1×7 -es lapot akarunk kivágni. Hány ilyen kis lapot tudunk készíteni? 

Országos döntő

1. Az első 8 pozitív egész számot helyezzük el egy kör kerületén úgy, hogy bármelyik szám osztható legyen a két szomszédjának a különbségével! →
2. Adjunk meg 2009 olyan pozitív egész számot, amelyek összege egyenlő a szorzatukkal. →
3. Az ábrán egy képzeletbeli ország városai és köztük épített utak láthatók. Be lehet-e járni az összes várost egyszer, és csak egyszer az utak mentén? →



4. Egy 6×6 -os táblázat mezőit fokozatos egyenként zöldre festjük. Ha egy mezőt befestettünk, akkor beleírjuk azt a számot, ami megmutatja, hány vele oldalszomszédos mező van már befestve. Mutassuk meg, hogy az összes mező befestése után a mezőkbe írt számok összege 60. →

Országos döntő

1. Egy táncos összejövetel után minden résztvevőt megkérdeztek (fiúkat és lányokat is), hány partnerrel táncolt az este folyamán. Sorra a következő válaszok születtek: 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. (Fiúk csak lányokkal, lányok csak fiúkkal táncoltak). Mutassuk meg, hogy valaki tévedett! →

2. Melyik nagyobb: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}$,
vagy

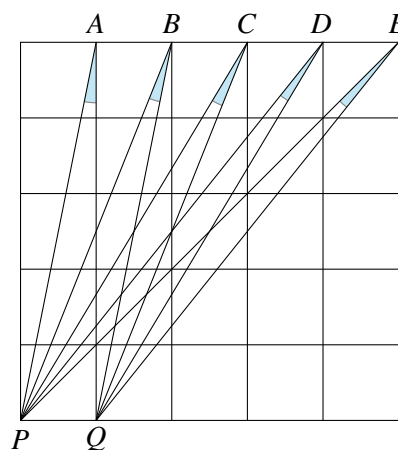
$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{39} + \frac{1}{40}?$$

3. Mennyi az ábrán látható PAQ , PBQ , PCQ , PDQ , PEQ szögek összege? →

4. Egy sorozatról a következőt tudjuk:
 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és ha $n \geq 1$, akkor $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$

Számítsuk ki a_{2009} -et. →

5. Adjunk meg 21 különböző pozitív egész számot, amelyeknek összege 211. →



Országos döntő

1. Az $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$ kifejezésben tegyünk ki zárójeleket úgy, hogy a kapott műveletek elvégzése után az eredmény 7 legyen! →
2. Egy kockát lapjával lefelé az asztalra teszünk. Az élei mentén forgatva mind a 12 élén pontosan egyszer átfordítva vissza kell érni a kiinduló helyzetbe. Megvalósítható-e ez a forgatássorozat? →
3. Hány olyan háromjegyű szám van, amely előállítható $\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a}$ alakban, ahol a, b, c számjegyek? →
4. A tavaszi idényben a focibajnokságban 16 csapat játszott, mindegyik mindegyikkel egy meccset. Előfordulhat-e, hogy minden csapatnak ugyanannyi győzelme, döntetlenje és veresége van? →

Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege ugyanannyi, mint a négyzete számjegyeinek összege! →
2. Az $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, 39^2, 40^2$ számok közé $+$ és $-$ jeleket írhatunk. Elérhetjük-e így azt, hogy a kapott eredmény 0 legyen? →
3. Adott egy derékszögű háromszög. Jelölje p annak a négyzetnek az oldalát, amelynek két csúcsa az átfogóra, másik két csúcsa egy-egy befogóra illeszkedik. Az átfogóból a négyzet két oldalán kimaradó két szakasz hossza legyen q és r . Igazoljuk, hogy $p^2 = qr$! →
4. Igazoljuk, hogy ha $n > 4$, akkor az első n pozitív egész számot két csoportra bonthatjuk úgy, hogy az egyik csoportban a számok összege egyenlő a másik csoportbeli számok szorzatával! →
5. Egy szabályos 9-szög oldalait felváltva két játékos, A és B , befesti egy-egy színnel. Az A játékos kezd, felváltva „lépnek”, és akkor fejeződik be a játék, ha minden oldal be van festve. Egy kikötés van: szomszédos oldalak nem lehetnek azonos színűek. Az veszt, aki utoljára kénytelen új színt választani. Mutassuk meg, hogy B -nek van nyerő stratégiája! →

Országos döntő

1. Van-e olyan háromjegyű pozitív egész szám, amelynek 25 pozitív osztója van? →
2. Melyik nagyobb: $3^{100} + 4^{100}$ vagy 5^{100} ? →
3. Adjunk meg olyan derékszögű háromszöget, amelyet fel lehet darabolni 3 egybevágó, az eredetihez hasonló háromszögre! →
4. Melyik az a legnagyobb és melyik az a legkisebb 10-jegyű szám, amely minden számjegyet pontosan egyszer tartalmaz, és osztható 11-gyel? →

MEGOLDÁSOK

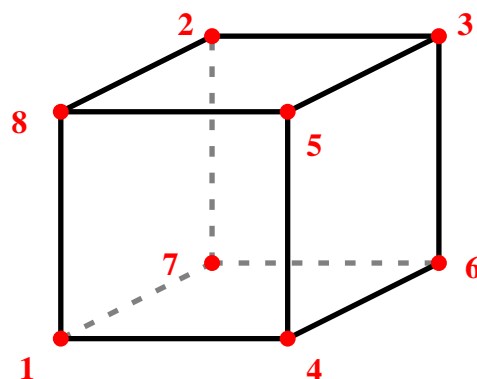
Megyei forduló

1. Hány olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros? (A 0 is páros!)

A százask helyén 4 számjegy állhat: 2, 4, 6, 8. A tízesek és az egyesek helyén 5 számjegy állhat, mert az előző 4 számjegyen kívül a 0 is szerepelhet. Így összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ olyan háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros. 

2. Számozzuk meg a kocka csúcsait az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokkal úgy, hogy bármelyik lapon ugyanannyi legyen a számok összege, mint a szemközti lapon.

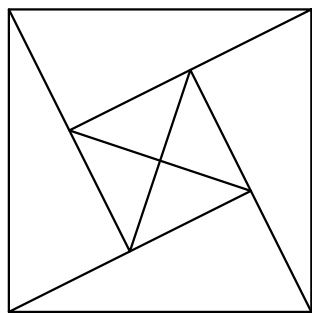
Egy megfelelő számozás az ábrán látható. Hogyan lehet ilyen megoldást találni? Egy-egy lapon a csúcsokhoz írt számok összege 18. Ez azért igaz, mert két szemközti lapon mind a 8 szám szerepel, azaz egy lapon a számok összegének $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{2} = \frac{36}{2} = 18$ -nak kell lennie. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat négy csoportra oszthatjuk, úgy, hogy minden csoportba két szám kerül, aminek az összege 9: {1, 8}, {2, 7}, {3, 6}, {4, 5}. Ha a kocka 4 függőleges élének végpontjaira egy csoportban lévő két számot írunk, akkor a kocka felső és alsó lapját kivéve, a többi lapon az összeg automatikusan 18 lesz.



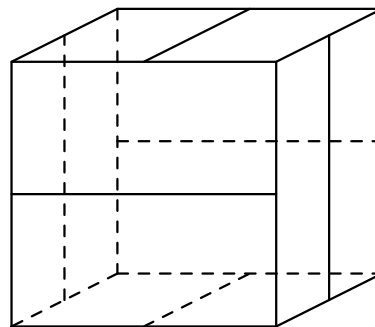
Minden függőleges él végpontjaira kétféleképpen írhatjuk fel az egy csoportban lévő két számot. Innét némi próbálkozás után adódik egy megoldás. 

3. Bontsunk fel egy négyzetet egyenes szakaszokkal 8 háromszögre úgy, hogy mindegyik háromszög pontosan három másik háromszöggel legyen szomszédos. (Két háromszög akkor szomszédos, ha szakaszban érintkeznek. Csak közös csúccsal rendelkező háromszögek nem szomszédosak.)

Egy jó felbontást az 1. ábrán láthatunk. 



1. ábra



2. ábra

4. Bontsuk fel egy kocka mind a 6 lapját két-két téglalpra úgy, hogy mindegyik téglalap 5 másikkal legyen egy oldalon vagy oldalának egy szakaszában határos!

A 2. ábrán láthatunk egy megfelelő felbontást. Minden lapot két egyforma (egybevágó) téglalpra bontottunk. 

Megyei forduló

1. Mutassuk meg, hogy

$$11111112222222 - 3333333$$

egy pozitív egész szám négyzete!

A 14-jegyű szám így írható:

$$11111112222222 = 10000002 \cdot 1111111$$

és azt is tudjuk, hogy

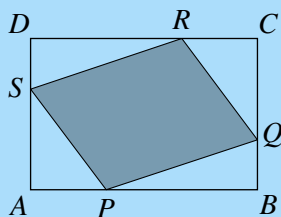
$$3333333 = 3 \cdot 1111111.$$

Így a különbség:

$$\begin{aligned} 11111112222222 - 3333333 &= 1111111 \cdot (10000002 - 3) = \\ &= 1111111 \cdot 9999999 = \\ &= 1111111 \cdot 1111111 \cdot 9 = \\ &= (3 \cdot 1111111)^2 = 3333333^2 \end{aligned}$$

vagyis a különbség tényleg négyzetszám. 

2. Az $ABCD$ téglalap megfelelő oldalainak harmadoló pontjai a P, Q, R, S pontok. Hányad része az $ABCD$ téglalap területének a $PQRS$ paralelogramma területe?



Legyen a téglalap oldalainak hossza $AB = CD = a$ és $BC = DA = b$. Az APS háromszög derékszögű, és

$$AP = \frac{1}{3}a, \quad AS = \frac{2}{3}b.$$

Mivel ez a két oldal merőleges egymásra, ezért az APS háromszög területe $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{3}b = \frac{1}{9}ab$. Hasonlóan elmondható ez a PBQ , QCR és az RDS háromszögről. A téglalap területe ab , és mind a 4 háromszög területe $\frac{1}{9}$ -e a téglalap területének, így a paralelogramma területe $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ része a téglalap területének. 

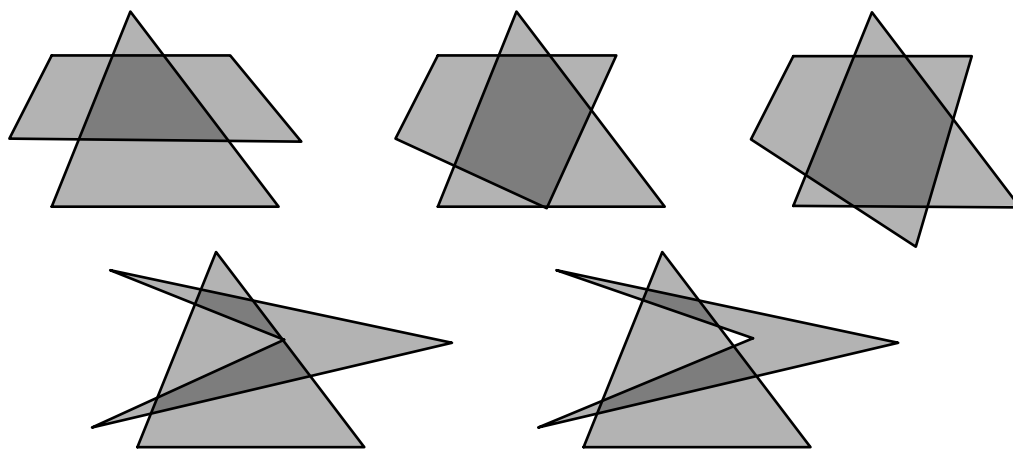
3. Állítsuk elő a 110-et olyan pozitív egész számok összegeként, amelyekre igaz, hogy a reciprokuk összege 1 (például 3 reciproka $\frac{1}{3}$).

Kitartó próbálkozással kapjuk, hogy $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = 1$.

Mivel $2 + 6 + 6 + 24 + 24 + 24 + 24 = 110$, ezért ez jó megoldás. 

4. Egy háromszög és egy négyszög kerületének lehet-e 4, 5, 6, 7 és 8 közös pontja? (Adjunk példákat!)

Mind az 5 lehetséges, és az alábbi ábra mutat mindegyikre egy-egy lehetséges megoldást:



Megyei forduló

1. Számítsuk ki a tízes számrendszerbeli háromjegyű számok számjegyeinek összegét!

Vizsgáljuk az egyesek helyén álló számjegyeket. Mivel ezeket a másik két jegytől függetlenül bárminek megválaszthatjuk, itt minden számjegy ugyanannyiszor szerepel. Összesen 900 háromjegyű szám van, tehát 90-szer szerepel mind a 10 számjegy az egyesek helyiértékén. Így az egyesek helyén álló számjegyek összege:

$$90 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9) = 90 \cdot 45 = 4050$$

Hasonlóképpen a tízesek helyén álló számjegyek összege is 4050.

A százások helyén nem állhat a 0 számjegy, a többi viszont igen. Így a százások helyén 100-szor szerepelnek az 1, 2, ..., 9 számjegyek. Így a százások helyén álló számjegyek összege:

$$100 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 100 \cdot 45 = 4500$$

Tehát a számjegyek összege $4050 + 4050 + 4500 = 12600$ 

2. A kert egy bizonyos részét az apa 2 óra alatt, a nagyobbik fia 3 óra alatt, a kisebbik fia 6 óra alatt ássa fel egyedül. Mennyi idő alatt ássák fel a kertnek azt a részét, ha mindhárman együtt dolgoznak?

Ha 6 óráig ásnának, az apa egy 3-szor akkora részt, a nagyobbik fiú egy 2-szer akkora részt, a kisebbik fiú pedig egy ugyanakkora részt tudna fölászni. Így 6 óra alatt egy 6-szor akkora részt ásnának föl. Így a 6 óra $\frac{1}{6}$ -a, vagyis 1 óra alatt fel tudják ásni a kertnek azt a részét. 

3. Egy téglalapot az ábrán látható módon négy téglalapra bontottunk. Három téglalapba beleírtuk a területét, a negyedik téglalap területe x . Számítsuk ki x értékét!

2	3
x	4

Nevezzük el a négy középső szakaszt az ábrán látható módon:

p	
a q	b

Első megoldás: Ekkor a négy téglalapra felírhatjuk a területük képletét:

$$a \cdot p = 2, \quad b \cdot p = 3, \quad a \cdot q = x, \quad b \cdot q = 4.$$

$$\text{Vagyis } 3 \cdot x = (b \cdot p) \cdot (a \cdot q) = (b \cdot q) \cdot (a \cdot p) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Amiből kapjuk, hogy $x = \frac{8}{3}$.

Második megoldás: Az a nyilván $\frac{2}{3}$ -a b -nek, hiszen a bal felső téglalap területe $\frac{2}{3}$ -a a jobb felsőnek, és a p hosszú oldaluk közös. Ebből következően a bal alsó téglalap területe $\frac{2}{3}$ -a a jobb alsónak, hiszen a q közös oldaluk. Ebből következően $x = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$. 

4. Kiválasztottunk két tízes számrendszerbeli kétjegyű számot. Tudjuk, hogy a többi (ki nem választott) kétjegyű szám összege éppen 50-szerese az egyik kiválasztott számnak. Melyik két számot választottuk ki?

Legyen a két kiválasztott kétjegyű szám a és b , és feltehetjük, hogy a 50-szerese lesz a többi összege.

$$10 + 11 + \dots + 98 + 99 - a - b = \frac{10+99}{2} \cdot 90 - a - b = 4905 - a - b = 50a$$

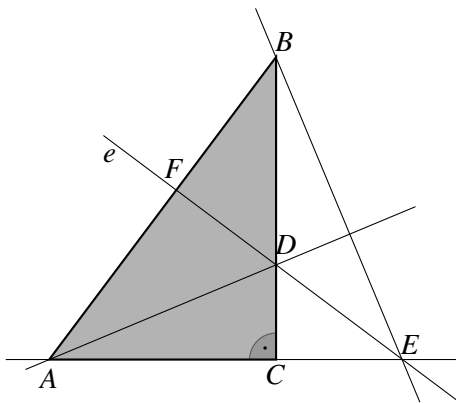
Mivel a és b kétjegyű, így $20 < a + b < 200$. Így csak akkor lesz 50-nel osztható $4905 - a - b$, ha $a + b = 55$, vagy $a + b = 105$, vagy $a + b = 155$.

- Ha $a + b = 55$, akkor $50a = 4850$, tehát $a = 97 > 55 = a + b$. Ez pedig lehetetlen.
- Ha $a + b = 105$, akkor $50a = 4800$, tehát $a = 96$. Ebből $b = 9$, ami szintén nem lehetséges.
- Ha $a + b = 155$, akkor $50a = 4750$, tehát $a = 95$. Ebből $b = 60$.

Tehát az egyetlen jó megoldás: $a = 95$ és $b = 60$. 

5. Az e egyenes merőleges az ABC derékszögű háromszög AB átfogójára, a BC befogó egyenesét D -ben, az AC befogó egyenesét E -ben metszi. Mekkora szöget zár be az AD és BE egyenes?

Legyen F az e és az AB átfogó metszéspontja. Az ABE háromszögben BC és EF magasságok, így D a magasságpont. Ezért AD is magasság, tehát AD merőleges BE -re.



Megyei forduló

1. A 100-tól 200-ig terjedő pozitív egész számok mindegyikének összeszorozzuk a számjegyeit, és a kapott szorzatokat összeadjuk. Mennyi lesz az összeg?

Ha szerepel a számban a 0 számjegy, akkor számjegyeinek szorzata 0. Ezért elég azokat a számokat figyelembe venni, amelyekben nem szerepel a 0 számjegy. Az első számjegy csak 1 lehet, ez nem befolyásolja a szorzatot.

A második és harmadik számjegyek szorzatának összege:

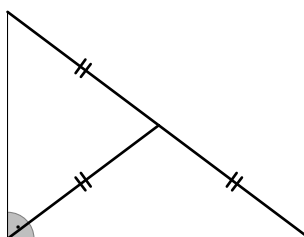
$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \dots + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = (1 + 2 + \dots + 9) \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 45 \cdot 45 = 2025.$$

Tehát a kérdéses összeg 2025.



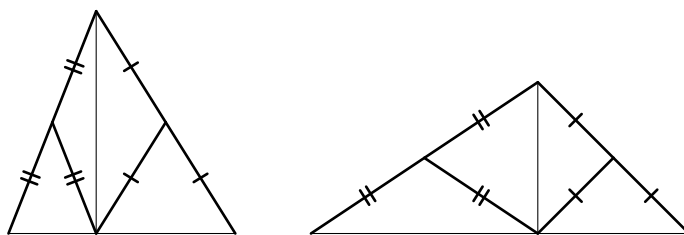
2. Mutassuk meg, hogy bármely háromszög feldarabolható egyenlőszárú háromszögekre!

Egy derékszögű háromszög az átfogóhoz tartozó súlyvonal behúzásával két egyenlőszárú háromszögre bomlik, melyek szárai a háromszög köré írt körének sugarával egyenlőek. (Thalész tétele miatt egy derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja.)



Egy hegyesszögű háromszögnek bármely magassága a háromszög belsejében halad, így két derékszögű háromszögre bontja a háromszöget. Egy tompaszögű háromszög leghosszabb oldalához tartozó magasság biztosan a háromszög belsejében halad, ezért két derékszögű háromszögre bontja a háromszöget.

A keletkezett derékszögű háromszögeket a fenti módon egyenlőszárú háromszögekre bontva az eredeti háromszöget is egyenlőszárú háromszögekre bontottuk.



Ezzel megadtuk az összes háromszögnek egy lehetséges feldarabolását.

3. Melyik lehet az a pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy a nála 1-gyel kisebb szám pozitív osztói közül 3 különbözőnek az összege?

Ha n jelöli a keresett számot, akkor $n - 1$ osztóit vizsgáljuk. A legnagyobb osztó $n - 1$, a legkisebb 1. Ezek összege n , ezért az $n - 1$ nem szerepelhet az összegben.

A következő legnagyobb osztó $\frac{n-1}{2}$ lehet, majd $\frac{n-1}{3}$, $\frac{n-1}{4}$ és így tovább következhet. Az $\frac{n-1}{2}$ -nél kisebbek közül bármely három összege kisebb, mint $n - 1$, ezért az $\frac{n-1}{2}$ -nek szerepelnie kell az összegben.

Bármely két $\frac{n-1}{3}$ -nél kisebb összegével kiegészítve az összeg kisebb, mint $n - 1$, ezért a $\frac{n-1}{3}$ -nak is szerepelnie kell.

Ha a harmadik szám legfeljebb $\frac{n-1}{6}$, az összeg legfeljebb $n - 1$, ezért ez sem lehet. Két lehetőség maradt:

- A harmadik osztó $\frac{n-1}{4}$, ekkor $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3} + \frac{n-1}{4}$, innen $n = 13$. Ez valóban jó, mert $13 = 6 + 4 + 3$.
- A harmadik osztó $\frac{n-1}{5}$, ekkor $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3} + \frac{n-1}{5}$, innen $n = 31$. Ez valóban jó, mert $31 = 15 + 10 + 6$.

Tehát a 13 és a 31 jó megoldás.

4. Egy kockát három olyan síkkal metszünk, amelyek párhuzamosak 2–2 oldallappal az ábrán látható módon. Igazoljuk, hogy a piros téglalapok területének összege egyenlő a kék téglalapok területének összegével!

Az arányokon nem változtat, ha feltesszük, hogy a kocka éle 1 hosszúságú. Használjuk az ábrán feltüntetett jelöléseket! Ekkor a kék téglalapok területének összege

$$x(1-z) + yz + (1-x)(1-y) = yz - xz - y + xy + 1.$$

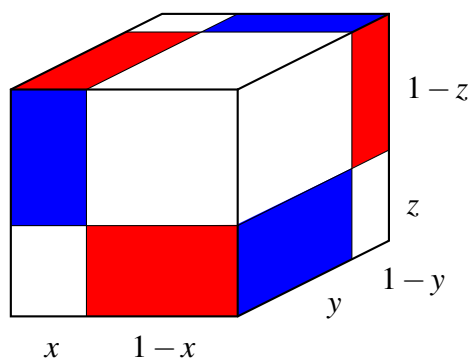
A piros téglalapok területének összege

$$(1-x)z + (1-z)(1-y) + xy = xy - xz - y + yz + 1.$$

Világos, hogy

$$yz - xz - y + xy + 1 = xy - xz - y + yz + 1,$$

tehát a területek valóban egyenlőek.



5. Néhány ládában összesen 36 tonna áru van. Mindegyik láda súlya legfeljebb 1 tonna. Igazoljuk, hogy egy 4 tonna teherbírású teherautóval legfeljebb 11 fordulóval az összes láda elszállítható, de 11-nél kevesebb fordulóval nem feltétlenül!

Először megmutatjuk, hogy 11 forduló elég.

8 fordulót úgy pakolunk meg, hogy rakjuk sorba a ládákat a teherautóra, és amikor először túllépjük a 4 tonnát, akkor az utolsó ládát levesszük, és félretesszük. Ezek a fordulók egyenként így biztosan könnyebbek, mint 4 tonna.

Az így félrerakott 8 ládát 4-4 felbontásban két fordulóval el lehet vinni, mert minden láda legfeljebb 1 tonnát nyom.

Ezzel a 10 fordulóval legalább $8 \cdot 4 = 32$ tonnányi ládát elszállítottunk, hiszen mindig akkor raktunk félre egy ládát, ha túlléptük a 4 tonnát. Így legfeljebb $36 - 32 = 4$ tonnányi láda marad, ezek elvihetőek a maradék 1 fordulóval.

Ez összesen valóban $8 + 2 + 1 = 11$ forduló.

A következő példa mutatja, hogy kevesebb forduló nem feltétlen elég.

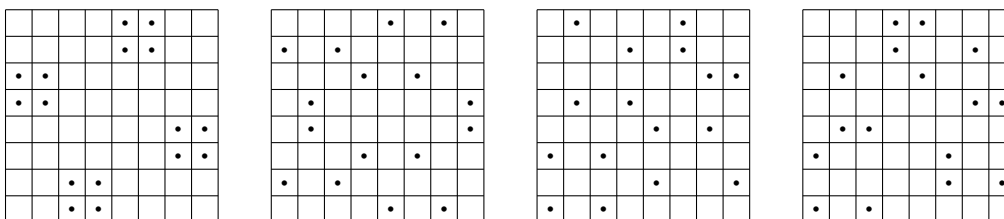
Ha van 44 db láda, melyek súlya egyenként $\frac{9}{11}$ tonna, akkor ezekből mindig legfeljebb 4-et lehet elvinni egy fordulóval, ezért kell a 11 forduló.



Országos döntő

1. Jelöljük meg a (8×8) -as sakktáblán 16 mező középpontját úgy, hogy semelyik 3 megjelölt pont ne essen egyenesbe!

Az ábrán látható négy megoldás:



Megjegyzés. Az világos, hogy minden sorban és minden oszlopban két középpontot kell megjelölni. Számítógép segítségével kiderült, hogy 380 különböző megoldás van.



2. A tízes számrendszerben felírt kétjegyű pozitív egész számoknak leírtuk a számjegyeik összegét (pl. 18-ból $1 + 8 = 9$ -et kaptuk). Sorold fel, melyik számot hányszor kaptuk így meg.

A legkisebb lehetséges jegyösszeg az 1, a 10 esetén. A legnagyobb lehetséges jegyösszeg a 18, a 99 esetén. Tehát a lehetséges jegyösszegek 1 és 18 között vannak.

Legyen $1 \leq a \leq 9$ egy egész szám. A jegyösszeg a esetben lesz éppen a . Az a jegyösszegű kétjegyű szám első jegye $1, 2, \dots, a$ lehet, ami után a második jegy a jegyösszeg miatt egyértelmű. Az első jegy nem lehet ennél nagyobb, mert akkor a jegyösszeg máris nagyobb lenne a -nál. Például 6, mint jegyösszeg összesen 6 féleképpen állhat elő: 60, 51, 42, 33, 24, 15.

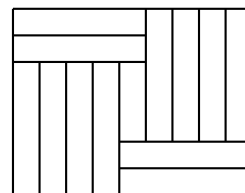
Hasonlóan, összeszámolhatjuk az $10 \leq b \leq 18$ jegyösszegeket. Itt arra kell figyelni, hogy az első jegy nem lehet $b - 9$ -nél kisebb, mert a második jegy legfeljebb 9. Tehát egy b jegyösszegű kétjegyű szám első jegye $b - 9, b - 8, \dots, 8, 9$ lehet, ami $19 - b$ lehetőség. Például 14 jegyösszeg

esetén $19 - 14 = 5$ féle kétjegyű szám van: 95, 86, 77, 68, 59.

Megjegyzés: A második esetet megkaphatjuk az első eset segítségével is. Ha egy xy kétjegyű szám jegyösszege a , akkor a $(10 - x)(9 - y)$ kétjegyű szám jegyösszege $19 - a$. Ez magyarázza azt, hogy az a és a $19 - a$ jegyösszeg ugyanannyi féleképpen áll elő. 

3. Adott egy 27×34 mezőből álló négyzetrácsos lemez, ebből kell minél több 1×5 -ös lapot kivágni. Hány ilyen lapot tudunk készíteni?

$27 \cdot 34 = 918 = 183 \cdot 5 + 3$. Tehát a területeket figyelembe véve legfeljebb 183 készíthető, és ez lehetséges is. Egy 27×5 -ös lemez szétvágható 27 darab 1×5 -ös lapra. A 27×34 -es lemez széléről vágjunk le 5 darab 27×5 -ös lemezt. A maradék 27×9 -es lemez másik széléről vágjunk le 4 darab 5×9 -es lemezt. A maradék 7×9 -es lemezt pedig az ábrán láthatóan szétvágva, 183 darab 1×5 -ös lapot sikerült szétvágni. 



4. Valamelyik évben 3 egymást követő hónapban összesen 12 hétfő volt. Mutassuk meg, hogy a három hónap között ott van a február!

Február kivételével minden hónap 30 vagy 31 napból áll. Ráadásul két szomszédos hónap közül az egyik legalább 31 napos. Tehát három egymást követő hónap legalább $30 + 31 + 30 = 91$ napból áll, ha nincs közöttük a február. $91 = 13 \cdot 7$. Hét egymást követő napból pontosan egy lesz hétfő. 91 egymást követő nap tehát összesen 13 hétfőt tartalmaz. Tehát ahhoz, hogy csak 12 hétfő legyen három egymást követő hónapban, szerepelnie kell a hónapok között a februárnak is. 2011-ben 3 egymást követő hónapban összesen 12 hétfő volt, a február-március-április hónapok alatt. 

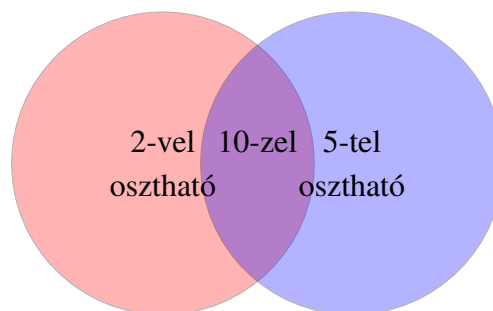
Országos döntő

1. Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, ami nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel?

Első megoldás: Egy legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám elé írjunk nullákat, hogy pontosan háromjegyű legyen. Azaz most a 23 helyett 023 lesz.

Egy szám pontosan akkor páros, ha utolsó jegye páros, azaz 0, 2, 4, 6 vagy 8. Egy szám pontosan akkor 5-tel osztható, ha utolsó jegye 0 vagy 5. Tehát egy szám pontosan akkor nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel, ha az utolsó jegye 1, 3, 7, vagy 9. Egy keresett szám első jegye 10 féle lehet (0, 1, 2, ..., 9). Ettől függetlenül a második jegye is 10 féle lehet (0, 1, 2, ..., 9). Végül az utolsó jegye 4 féle lehet (1, 3, 7, 9). Tehát $10 \cdot 10 \cdot 4 = 400$ ilyen szám van.

Második megoldás: 1 és 999 között $\frac{998}{2} = 499$ páros szám van. (998 a legnagyobb páros szám, és addig minden második páros.) 1 és 999 között $\frac{995}{5} = 199$ 5-tel osztható szám van. 1 és 999 között $99 = \frac{990}{10}$ 2-vel és 5-tel is osztható, azaz 10-zel osztható szám van. Tehát 1 és 999 között $499 + 199 - 99 = 599$ 2-vel vagy 5-tel is osztható szám van. Azaz a sem 2-vel, sem 5-tel nem osztható számokból $999 - 599 = 400$ van. 



2. Egy négyzet egy belső pontja a négyzet egyik oldalától 6 cm, a másiktól 7 cm, a harmadiktól 8 cm és a negyediktől 9 cm távolságra van. Mekkora a négyzet oldala?

A négyzet egy belső pontjának két szemközti oldalától vett távolságának az összege éppen a négyzet oldala. Tehát a 6, 7, 8, 9 számokat kell két csoportra osztanunk, hogy a két részben a számok összege azonos legyen. Ez csak úgy lehetséges, ha a 6 és a 9 van az egyik; a 7 és a 8 a másik csoportban. Ekkor $6 + 9 = 7 + 8 = 15\text{cm}$ a négyzet oldala.

	9
8	7
6	



3. Az 5. osztályban 7-tel kevesebb fiú van, mint lány. Ebből az osztályból egy fiú azt állítja, hogy kétszer annyi lány osztálytársa van, mint fiú. Hányan járnak ebbe az osztályba?

Jelöljük f -fel a fiúk számát, l -lel a lányok számát. A feladat szövege szerint $l - 7 = f$ és $2 \cdot (f - 1) = l$. Innét $2 \cdot f - 2 = f + 7$, azaz $f = 9$ és $l = 16$. Tehát 25-en jártak ebbe az osztályba.



4. A 90 és 91 érdekes tulajdonságú számpár. Az első számjegyeinek összegét a második számhoz adva 100-at kapunk, és fordítva, a második számjegyeinek összegét az elsőhöz adva is 100-at kapunk. Keressük meg az összes ilyen tulajdonságú kétjegyű számpárt!

Egy érdekes számhoz egy kétjegyű szám jegyeit hozzáadva 100-at kapunk. Egy kétjegyű szám jegyeinek az összege legfeljebb 18, tehát egy érdekes szám legalább 82. Viszont a 82 és 99 közötti számok jegyösszege legalább 8 (mivel már az első jegye legalább 8). Azaz egy érdekes szám legfeljebb 92 lehet. Egy szám párja csak az a szám lehet amit úgy kapunk meg, hogy 100-ból levonjuk a jegyeinek az összegét. Az alábbi táblázat tartalmazza a 82 és 92 közötti számok lehetséges párjait.

szám	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
jegyösszeg	10	11	12	13	14	15	16	17	9	10	11
„pár” = $100 - \text{jegyösszeg}$	90	89	88	87	86	85	84	83	91	90	89

A táblázatból leolvashatjuk, hogy az érdekes tulajdonságú számpárok a $\{83, 89\}$, a $\{84, 88\}$, a $\{85, 87\}$, a $\{86, 86\}$, és a $\{90, 91\}$.



Országos döntő

1. Azt a feladatot kaptuk, hogy egy tojást pontosan 4 percig főzzünk. Rendelkezésünkre áll egy 3 perces és egy 5 perces homokóra, más időmérő eszköz azonban nincs. Hogyan oldjuk meg a feladatot?

Indítsuk el mindkét órát egyszerre. Mikor lejárt a 3 perces, azonnal fordítsuk meg. Amikor az 5 perces lejárt, tegyük a tojást a vízbe. Az eredeti indítástól számítva 6 perc elteltével lejár ismét a 3 perces. Fordítsuk meg megint, és amikor harmadszor is lejár, akkor vegyük ki a tojást a vízből. Mivel $3 \cdot 3 - 5 = 4$, ezért a tojás éppen 4 percig van a vízben.



2. Fel lehet-e darabolni egy konvex 17-szöget 14 háromszögre?

Nem lehet feldarabolni. Ha ugyanis felbontjuk a 17-szöget háromszögekre, akkor a 17-szög csúcspontjai szükségszerűen bizonyos háromszögek csúcspontjai is lesznek. Az egy ilyen csúcsban találkozó háromszögek ottani szögeinek összege épp a 17-szög adott csúcsbeli szögét adja ki. Így a háromszögek szögeinek összege legalább a 17-szög szögeinek összege kell legyen, hiszen minden háromszögnek egy szögét csak egy csúcsnál számolhattuk.

De a háromszög szögeinek összege 180° , így 14 háromszögre $14 \cdot 180^\circ$. Ezzel szemben a 17-szög szögeinek összege $15 \cdot 180^\circ$, hiszen ha az egy csúcsából induló 14 átlójával 15 háromszögre bontjuk, akkor ezek belső szögeinek összege pontosan a 17-szög belső szögeinek összegét adja ki.

Tehát a 17-szög szögösszege nagyobb 14 háromszög szögeinek összegénél, így a korábbiak szerint egy ilyen háromszögekre való felbontásban nem lehet pontosan 14 háromszög. 

3. Számítsuk ki minél egyszerűbben!

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{101}\right)$$

Hozzuk közös nevezőre egyenként a zárójelekben lévő összegeket. Ekkor ezt kapjuk:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{102}{101} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 102}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 101}.$$

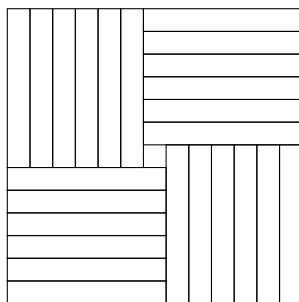
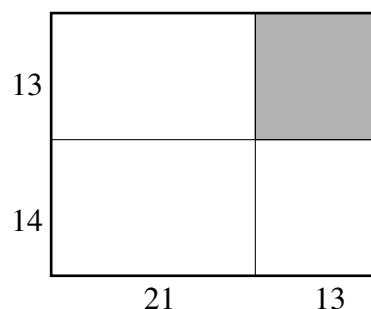
Jól látható, hogy a $3, 4, 5, \dots, 101$ tényezők mindegyike szerepel a számlálóban és a nevezőben is, így azokkal lehet egyszerűsíteni. Ezek után marad, hogy a végeredmény: $\frac{102}{2} = 51$. 

4. Egy 27×34 -es négyzethálós lapunk van. Ebből minél több 1×7 -es lapot akarunk kivágni. Hány ilyen kis lapot tudunk készíteni?

Mivel $24 \cdot 37 = 918 = 131 \cdot 7 + 1$, így legfeljebb 131 kis lapot tudunk készíteni. Megmutatjuk, hogy ennyit lehet is. Osszuk fel a téglalapot az ábrán látható módon négy kisebb téglalagra.

A jobb felső 13×13 -as négyzetet leszámítva minden téglalapnak van 7-tel osztható oldala, így azokat fel tudjuk vágni 1×7 -es darabokra. A bal felső, 13×21 -es téglalaphból 39, a bal alsó, 14×21 -es téglalaphból 42, míg a jobb alsó, 14×13 -as téglalaphból 26 kis lap készíthető.

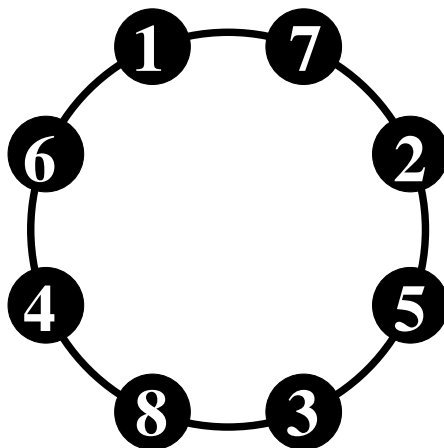
A következő ábrán látható módon pedig a 13×13 -as négyzetből tudunk kivágni kis lapokat úgy, hogy mindössze a középső mező megy kárba.



Egy mező kivételével mindent felhasználtunk a kis lapok készítéséhez, így 131 lapot készítettünk. 

Országos döntő

1. Az első 8 pozitív egész számot helyezzük el egy kör kerületén úgy, hogy bármelyik szám osztható legyen a két szomszédjának a különbségével!



2. Adjunk meg 2009 olyan pozitív egész számot, amelyek összege egyenlő a szorzatukkal.

Keressük úgy a számokat, hogy van köztük 2007 darab 1-es, és két 1-től különböző pozitív egész, a és b . Ekkor a feltételekből következik, hogy

$$ab = a + b + 2007.$$

Ezt átrendezve, szorzattá bontva a következőket kapjuk:

$$ab - a - b + 1 = 2008$$

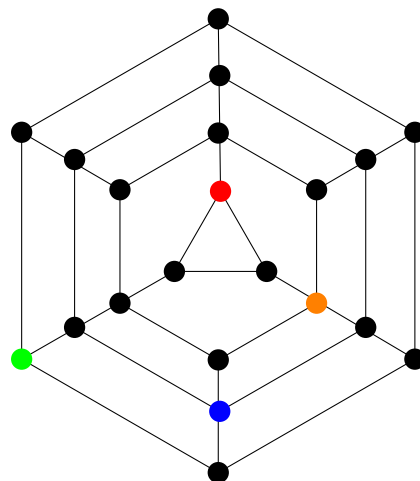
$$(a - 1)(b - 1) = 2008$$

Válasszuk a -t és b -t úgy, hogy $a - 1 = 2$, $b - 1 = 1004$, vagyis $a = 3$ és $b = 1005$. Vagyis a számaink: 2007 darab 1-es, egy darab 3-as és egy darab 1005-ös. Ezek összege és szorzata is 3015.



3. Az ábrán egy képzeletbeli ország városai és köztük épített utak láthatók. Be lehet-e járni az összes várost egyszer, és csak egyszer az utak mentén?

Induljunk el az ábrán pirossal jelölt városból, és a belső háromszögben haladjunk óramutató járásával ellentétes irányban. Mikor bejártuk a 3 belső várost, akkor lépünk át a legbelső hatszögre, a narancssárgával jelölt városba. Ezen a hatszögon haladjunk körbe az óramutató járásával ellentétesen, majd az utolsó városból lépünk ki a középső hatszögre, mégpedig a kékkel jelölt városba. Hasonló módon haladjunk végig a középső hatszög városain is, majd lépünk ki a külső hatszögre, a zöld városba. Végül pedig a külső hatszögon tetszés szerinti irányban haladjunk körbe. (Ezen kívül több egyéb megoldás is létezik.)



4. Egy 6×6 -os táblázat mezőit fokozatos egyenként zöldre festjük. Ha egy mezőt befestettünk, akkor beleírjuk azt a számot, ami megmutatja, hány vele oldalban szomszédos mező van már befestve.

Mutassuk meg, hogy az összes mező befestése után a mezőkbe írt számok összege 60.

Tekintsünk két szomszédos mezőt. Ezek közül annál, amelyiket később festjük be, eggyel fogja növelni a ráírt számot az a tény, hogy a másik már be van festve. Vagyis minden kis határoló szakasz 1-et ad a teljes összegbe, így ezek darabszáma adja meg a mezőkre írt számok összegét. Pontosan 60 ilyen határoló szakasz van a 6×6 -os táblázatban, mivel minden függőleges és vízszintes szakaszon van 6, és ezekből a szakaszokból pedig 5-5 van. Így az összeg is minden esetben 60 a folyamat végén. 

Országos döntő

1. Egy táncos összejövetel után minden résztvevőt megkérdeztek (fiúkat és lányokat is), hány partnerrel táncolt az este folyamán. Sorra a következő válaszok születtek: 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. (Fiúk csak lányokkal, lányok csak fiúkkal táncoltak). Mutassuk meg, hogy valaki tévedett!

Mivel minden táncban egy fiú és egy lány vett részt, így a fiúk által mondott számok összegének ugyanannyinak kell lennie, mint a lányok által mondott számok összege. Tehát a fiúk által mondott számok összege:

$$\frac{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6}{2} = 37.$$

37 hármassal maradéka 1. A felsorolt számok közül az 5 kivételével mind osztható 3-mal. Az 5 hármassal maradéka 2, így fiúk által mondott számok összege vagy 0 vagy 2 maradékot ad hárommal osztva. Tehát nem lehet 37. 

2. Melyik nagyobb:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{39} + \frac{1}{40}?$$

Először alakítsuk át az első összeget:

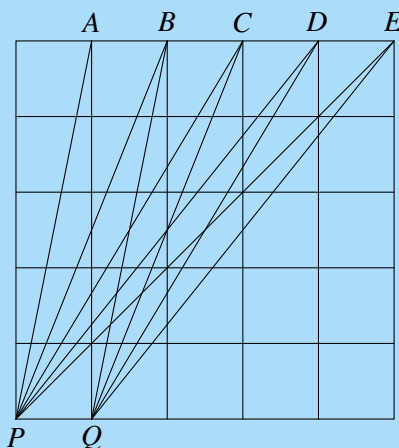
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Tehát az első összeg kisebb mint 1. A második összeget becsüljük meg a következőképpen: Az első tíz tagnál kisebb $\frac{1}{20}$. A második tíz tagnál kisebb $\frac{1}{30}$. Az utolsó tíz tagnál kisebb $\frac{1}{40}$. Tehát

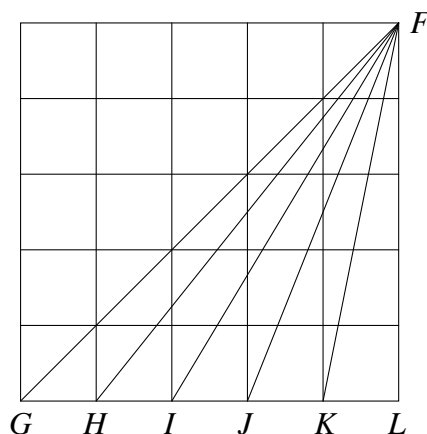
$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{39} + \frac{1}{40} > 10 \cdot \frac{1}{20} + 10 \cdot \frac{1}{30} + 10 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1.$$

Tehát a második összeg nagyobb mint 1. Ebből következik, hogy a második összeg a nagyobb. 

3. Mennyi az ábrán látható PAQ , PBQ , PCQ , PDQ , PEQ szögek összege?



Tekintsük a következő ábrát:



Ezen az ábrán az F csúcsnál éppen a kérdéses szögek jelennek meg:

$KFL \sphericalangle = PAQ \sphericalangle$, $JFK \sphericalangle = PBQ \sphericalangle$, $IFJ \sphericalangle = PCQ \sphericalangle$, $HFI \sphericalangle = PDQ \sphericalangle$, $GFH \sphericalangle = PEQ \sphericalangle$.

Tehát a szögek összege $LFG \sphericalangle = 45^\circ$



4. Egy sorozatról a következőt tudjuk: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, és ha $n \geq 1$, akkor $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$. Számítsuk ki a_{2009} -et.

Számítsuk ki az első néhány elemét a sorozatnak:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 = 1, a_7 = 1$$

Mivel a sorozat minden tagja csak az előző két tagtól függ, így innentől periodikusan ismétlődni fog a sorozat. A periódus hossza 5. Mivel 2009 ötös maradéka 4, így $a_{2009} = a_4 = 3$.



5. Adjunk meg 21 különböző pozitív egész számot, amelyeknek összege 211.

Számítsuk ki a 21 legkisebb pozitív egész szám összegét:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 21 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

Ebből következik, hogy bármely 21 különböző pozitív egész szám összege legalább 231. Tehát nincs megoldása a feladatnak.



1. Az $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$ kifejezésben tegyük ki zárójeleket úgy, hogy a kapott műveletek elvégzése után az eredmény 7 legyen!

Vegyük észre, hogy minden számmal vagy osztunk, vagy szorzunk, a zárójelezéstől függően. Az összes szám szorzata: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 \cdot 7$. Ebből látszik, hogy azt kell elérni, hogy összesen $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) \cdot 7$ -tel szorozzunk, és $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)$ -tel osszunk. Így az eredmény pont 7 lesz. Azt is észrevehetjük, hogy $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) \cdot 7 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$. Mivel $a : (b : c) = a \cdot c : b$, így a következő zárójelezés az előzőek alapján megfelelő: $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : (6 : 7 : 8 : 9 : 10)$ 

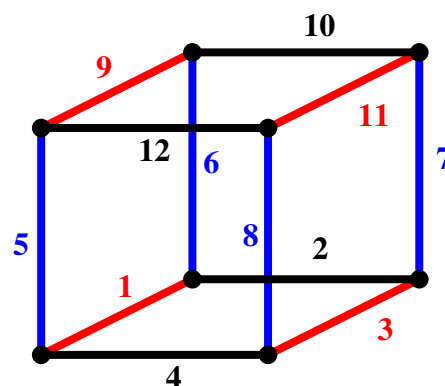
2. Egy kockát lapjával lefelé az asztalra teszünk. Az élei mentén forgatva mind a 12 élén pontosan egyszer átfordítva vissza kell érni a kiinduló helyzetbe. Megvalósítható-e ez a forgatássorozat?

Ha egy kockát minden éle mentén pontosan egyszer fordítunk át, akkor az mindenképpen ugyanazon a lapján fog állni, mint kiinduláskor. Ennek az az oka, hogy azt a lapot 4 él határolja. Amikor az elsőn átfordítjuk a kockát, akkor „elfordul” a kockának erről a lapjáról, amikor a másodikon fordítjuk át, akkor „visszafordul” erre a lapra, a harmadiknál megint el, majd a negyediknél megint vissza. Vagyis visszatér a kocka abba a helyzetbe, hogy ugyanazon a lapján áll, amelyen induláskor állt.

A feladatban lévő *kiinduló helyzetet* többféleképpen is értelmezhetjük.

Első értelmezés. A kiindulási helyzet azt jelenti, hogy a kocka a forgatások után ugyanazon a lapján áll.

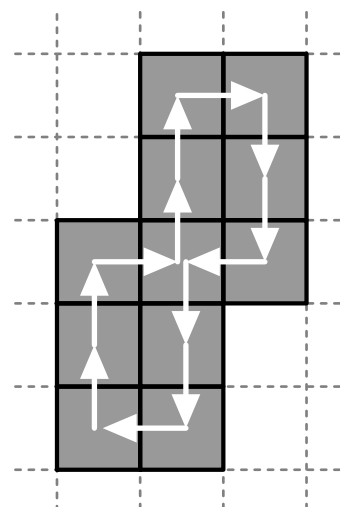
Ebben az esetben megvalósítható ilyen forgatássorozat. Számozzuk meg a kocka éleit az ábrán látható módon. (A színek csak annak tisztázását segítik, hogy melyik szám melyik élhez tartozik.) Ezek után rendre az 1, 5, 8, 3, 4, 12, 11, 7, 10, 9, 6, 2 éleken átforgatva a kockát egy megfelelő forgatássorozatot kapunk.



Megjegyzés. Erre úgy lehet rátalálni, hogy ha felrajzolunk egy gráfot, amelynek csúcsai a kocka lapjai. Az él pedig azt jelenti, hogy ha egyik lapján áll a kocka akkor ezt a lapot összekötjük egy másikkal, ha van olyan él, amin átfordítva a kocka éppen a másik lapra fordul. Ha ezeket az éleket a fenti ábra szerint megszámozzuk, akkor egy *Euler-körben* követve a számozást, megkapunk egy megfelelő forgatássorozatot.

Második értelmezés. A kiindulási helyzet azt jelenti, hogy a kockának az asztalon is pont ugyanazon a helyen kell lennie.

Ez is megoldható, de ez már lényegesen nehezebb feladat. Tegyük magunk elé a kockát az asztalon. Forgassuk úgy az éleket, hogy a kocka mozgása az asztalon a következő legyen: fel, fel, jobbra, fel, fel, jobbra, le, le, balra, le, le, balra. Ellenőrizhető, hogy így minden élén pontosan egyszer fordul át a kocka és visszatér a kiindulási helyzetébe a fenti értelemben. 



3. Hány olyan háromjegyű szám van, amely előállítható $\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a}$ alakban, ahol a, b, c számjegyek?

$$\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = (100a + 10b + c) + (10a + b) + a = 111a + 11b + 1c.$$

Ha b -n változtatunk, legfeljebb $11 \cdot 9 = 99$ -cel változik az összeg. Ha c -n változtatunk, legfeljebb 9-cel változik az összeg. Ha a -n változtatunk legalább 111-gyel változik az összeg, ha pedig b -n akkor legalább 11-gyel. Ebből látszik, hogy különböző a, b, c számhármashoz különböző összeg tartozik. Tehát elég azt megszámlálni, hogy hány olyan a, b, c számhármashoz van, ami nem háromjegyű összeget ad.

Az a nem lehet 0, mivel egy háromjegyű szám elején szerepel. Ha $a < 9$ akkor az összeg legfeljebb $8 \cdot 111 + 9 \cdot 11 + 9 = 996$, tehát háromjegyű a szám. Ha $a = 9$ akkor az összeg legalább $999 + 0 + 0 = 999$ és ha b vagy c nem 0, akkor ennél nagyobb. Tehát $10 \cdot 10 - 1 = 99$ esetben nem háromjegyű az összeg. Tehát $9 \cdot 10 \cdot 10 - 99 = 801$ háromjegyű szám áll elő ilyen alakban. 

4. A tavaszi idényben a focibajnokságban 16 csapat játszott, mindegyik mindegyikkel egy meccset. Előfordulhat-e, hogy minden csapatnak ugyanannyi győzelme, döntetlensége és veresége van?

Igen, ez előfordulhat. Minden csapat 15 másik csapattal játszik, és előfordulhat, hogy minden csapat 5 győzelmet aratott, 5 vereséget szenvedett és 5 döntetlent ért el. Képzeljük úgy, hogy a csapatok körben helyezkednek el. Ha minden csapat megverte a körön óramutató járása szerint utána jövő 5 csapatot, és kikapott az előtte lévő 5 csapattól, míg a maradék 5-tel döntetlent játszott, akkor egy jó konstrukcióhoz jutunk.

Megjegyzés: Ha minden mérkőzés döntetlen, akkor nem kapunk a feladat feltételeinek megfelelő megoldást. 

Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege ugyanannyi, mint a négyzete számjegyeinek összege!

Észrevehetjük, hogy

$$9^2 = 81$$

$$99^2 = 9801$$

Ezek tehát megfelelőek. Belátjuk, hogy az összes $99 \dots 9$ alakú szám megfelelő:

$$\underbrace{(99 \dots 9)^2}_{n \text{ db}} = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{n-1 \text{ db}} \underbrace{800 \dots 0}_{n-1 \text{ db}} 1$$

Valóban megegyeznek a számjegyek összegei a megfelelő számokban.

Megjegyzés: A tíz hatványai is ilyen tulajdonságúak ($1^2 = 1, 10^2 = 100, 100^2 = 10000, \dots$). 

2. Az $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, 39^2, 40^2$ számok közé $+$ és $-$ jeleket írhatunk. Elérhetjük-e így azt, hogy a kapott eredmény 0 legyen?

Igen. Az összeg 5 csoportra bontható, melyek mindegyikében külön-külön 0 az összeg.

$$(k-1)^2 - k^2 - (k+1)^2 + (k+2)^2 = 6$$

Bármely 8 egymást követő számot ennek megfelelően előjelezve tehát 0-t kapunk:

$$[(k-1)^2 - k^2 - (k+1)^2 + (k+2)^2] - [(k+3)^2 - (k+4)^2 - (k+5)^2 + (k+6)^2] = 6 - 6 = 0$$

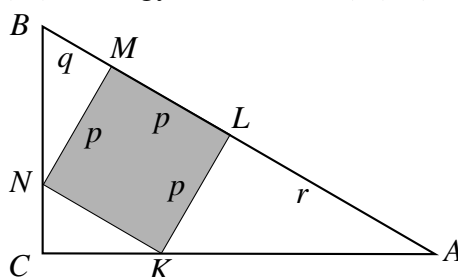
Tehát például

$$(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) - (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots - (37^2 - 38^2 - 39^2 + 40^2) = 0$$



3. Adott egy derékszögű háromszög. Jelölje p annak a négyzetnek az oldalát, amelynek két csúcsa az átfogóra, másik két csúcsa egy-egy befogóra illeszkedik. Az átfogóból a négyzet két oldalán kimaradó két szakasz hossza legyen q és r . Igazoljuk, hogy $p^2 = qr$!

Jelölje a háromszög csúcsait A, B, C , a négyzet csúcsait K, L, M, N az ábrán látható módon.



AKL és NBM hasonló háromszögek, mert szögeik megegyeznek. Ugyanis $ALK \sphericalangle = NMB \sphericalangle = 90^\circ$ és $KAL \sphericalangle = MNB \sphericalangle$, mert mindkettő a $NBM \sphericalangle$ -t egészíti ki 90° -ra. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya megegyezik, ezért

$$\frac{q}{p} = \frac{p}{r}$$

Innen átszorzással éppen $p^2 = qr$.



4. Igazoljuk, hogy ha $n > 4$, akkor az első n pozitív egész számot két csoportra bonthatjuk úgy, hogy az egyik csoportban a számok összege egyenlő a másik csoportbeli számok szorzatával!

Vizsgáljuk külön az eseteket aszerint, hogy n páros, vagy páratlan. Számok szorzata általában jóval nagyobb, mint az összege, ezért úgy érdemes próbálkozni, hogy kevés számot szorzunk össze, és sokat adunk össze. Az első n szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$.

- Ha n páros, akkor $n = 2k$ alakú valamely pozitív egész (2-nél nagyobb) k -ra. Az egyik csoportban legyenek az $1, k-1, 2k$ számok, ezek szorzata $2k(k-1)$. A másik csoportba kerüljön a maradék, ezek összege

$$\frac{2k(2k+1)}{2} - 1 - (k-1) - 2k = k(2k+1) - 3k = k(2k-2) = 2k(k-1).$$

Valóban megegyezik az egyik csoportban az összeg a másik csoportban a szorzattal.

- ha n páratlan, akkor $n = 2k+1$ alakba írható. Az egyik csoportban legyenek az $1, k, 2k$ számok, ezek szorzata $k \cdot 2k$. A másik csoportban a többi szám összege

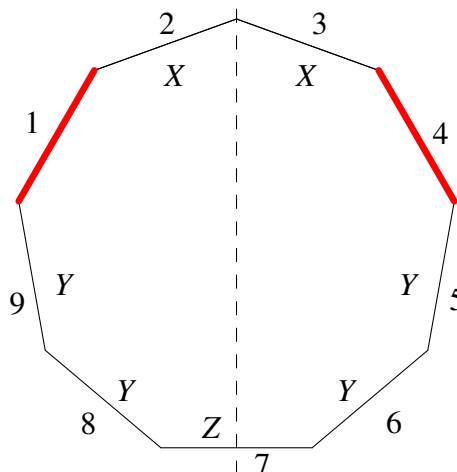
$$\frac{(2k+1)(2k+2)}{2} - 1 - k - 2k = (2k+1)(k+1) - 1 - 3k = 2k \cdot k$$

Az $n > 4$ kikötésre azért volt szükség, hogy a fenti megoldásban felsorolt számok különböző pozitív egészek legyenek, pl. $n = 4$ esetén $1 = (k - 1)$ lett volna. 

5. Egy szabályos 9-szög oldalait felváltva két játékos, A és B , befesti egy-egy színnel. Az A játékos kezd, felváltva „lépnek”, és akkor fejeződik be a játék, ha minden oldal be van festve. Egy kikötés van: szomszédos oldalak nem lehetnek azonos színűek. Az veszít, aki utoljára kénytelen új színt választani. Mutassuk meg, hogy B -nek van nyerő stratégiája!

Két dolgot előljáróban vegyünk észre.

- Két szín biztosan nem lesz elegendő a játék során, hiszen ekkor felváltva kellene színeznünk az oldalakat, de mivel páratlan sok oldalunk van, ezért ez nem lehetséges.
- Három szín viszont biztosan elég, sosem lesz senki rákényszerítve, hogy egy negyedik színt válasszon. Ennek az az oka, hogy minden oldalnak két szomszédja van, ezért legfeljebb két szín lehet „tiltott” az adott oldal kiszínezésénél, vagyis egy harmadik mindig megfelelő lesz.



Azt akarjuk tehát elérni, hogy mindenképpen A válassza a harmadik színt.

Legyen az A által választott első szín a piros, és tegyük fel, hogy az ábrán az 1-essel jelölt oldalt színezte pirosra. (Ez a feltételezés nem ront az általános megoldáson, mert annak megfelelően számozzuk meg a sokszöget, hogy melyik oldalt színezte A először.) Ezek után színezzé B is pirosra a 4-essel jelölt oldalt.

Most 3 részre bontjuk a folytatást aszerint, hogy erre A mit válaszol.

- Ha A második lépésében az X -szel jelölt mezők valamelyikét színezi be, akkor B a Z -vel jelölt mezőt színezzé be pirosra.
 - Ha ezt követően A az egyetlen megmaradó X -szel jelölt oldalt festi be, akkor ahhoz szükséges egy harmadik színt választania, és B -nek pedig elég lesz a 3 szín, így B nyer.
 - Ha az Y -nal jelölt mezők valamelyikét színezi A , akkor B színezzé a szaggatott vonalra vett tükröképét ugyanilyen színűre. Így B -nek biztosan nem kell új színt választania, ami ismét azt jelenti, hogy B nyer.
- Ha A a második lépésében a Z -vel jelölt oldalt színezi be, akkor B színezzé be az X -szel jelölt oldalak valamelyikét. Ha A használt második színt, akkor azzal, ha nem, akkor válasszon egy második színt. Ekkor ugyanaz a helyzet állt elő lényegében, mint az előző esetben.
- Ha A a második lépésében az Y -nal jelölt mezők valamelyikét színezi, akkor „másolja” ezt B a tükröképénél. Ha a későbbiekben A a Z -vel vagy X -szel jelölt mezők valamelyikéből választ, akkor B járjon el a fentiek szerint.

Ez a megoldás minden páratlan oldalú sokszögre általánosítható, ha az Y -nal jelölt szakaszok számát rugalmasan változtatjuk az oldalak számának megfelelően. 

Országos döntő

1. Van-e olyan háromjegyű pozitív egész szám, amelynek 25 pozitív osztója van?

Ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ a szokásos prímtenyezős felbontásban, akkor n pozitív osztóinak száma $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$. Ugyanis minden prímtenyezőről egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy az adott osztóban mekkora hatványon szerepeljen. 0 és α_i között választhatunk egy egész számot, ez $\alpha_i + 1$ lehetőség.

A 25-öt kell tehát $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$ alakban előállítani. Két lehetőség van:

- $25 = 24 + 1$, ekkor $n = p_1^{24}$. Ha p_1 a lehető legkisebb, azaz 2, már akkor is több, mint háromjegyű számot kapunk, ami nem megengedett.
- $25 = (4 + 1) \cdot (4 + 1)$, ekkor $n = p_1^4 p_2^4$. Ha p_1, p_2 a lehető legkisebb, azaz 2 és 3, n akkor is több, mint háromjegyű: $2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$.

Tehát nincs megfelelő háromjegyű szám. 

2. Melyik nagyobb: $3^{100} + 4^{100}$ vagy 5^{100} ?

$3^2 + 4^2 = 5^2$. Ez alapján

$$3^{100} + 4^{100} = (3^2)^{50} + (4^2)^{50} < (3^2 + 4^2)^{50} = (5^2)^{50} = 5^{100}$$

A középső egyenlőtlenség azért teljesül, mert ha a jobb oldalon felbontjuk a zárójeleket, a bal oldalon szereplő két tag mellett még rengeteg sok pozitív tag megjelenik.

Tehát $3^{100} + 4^{100} < 5^{100}$. 

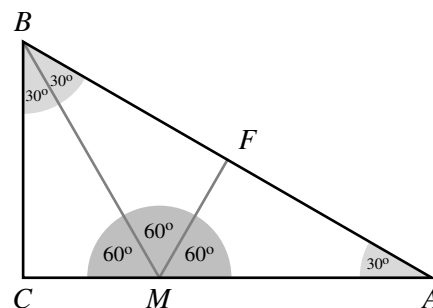
3. Adjunk meg olyan derékszögű háromszöget, amelyet fel lehet darabolni 3 egybevágó, az eredetihez hasonló háromszögre!

Egy $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ -os háromszöget fel lehet darabolni az ábrán látható módon. A B csúshoz tartozó szögfelező messe az AC oldalt M -ben, a másik daraboló egyenes legyen az AMB szögfelezője, mely F -ben metszi az AB oldalt.

$\angle MBC = 60^\circ / 2 = 30^\circ$ ezért $\angle BMC = 60^\circ$.

$\angle AMF = 120^\circ / 2 = 60^\circ$ tehát $\angle AFM = 90^\circ$.

Így valóban az összes háromszögnek $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ -osak a szögei. 



4. Melyik az a legnagyobb és melyik az a legkisebb 10-jegyű szám, amely minden számjegyet pontosan egyszer tartalmaz, és osztható 11-gyel?

A 10 11-gyel osztva -1 maradékot ad, ezért $10^{2n} - 1$ maradékot ad 11-gyel osztva, míg $10^{2n+1} - 1$ -et. Ezek alapján a 11-gyel oszthatóság szabálya: A páros és páratlan helyiértékeken ellentétes előjellel összeadva a számokat 11 többszörösét kell kapnunk.

Az összes számjegy összege 45. Így az előjeles összeg nem lehet 0. 11 lehet, ha az egyik csoportban 28 az összeg, a másikban 17. 22 sem lehet, 33 úgy lehet elvileg, ha az egyik csoportban 6, a másikban 39 az összeg. Ez azonban nem valósulhat meg, mert az 5 legkisebb számjegy összege is nagyobb 6-nál.

Tehát mindenképp úgy kell két ötös csoportra osztani a számokat, hogy az egyikben 28, a másikban 17 legyen az összeg.

Amikor a legnagyobb számot keressük, írjuk a nagyobb helyiértékekre a lehető legnagyobb számjegyet, amíg lehet. 9876524130 a feltételeknek megfelelő szám. 5-ös után nem lehetne se 4, se 3, mert akkor már mindkét csoportban biztosan túllépnék a 17-et. Így 2,4 a legjobb folytatás, amit csak így tudunk befejezni.

Amikor a legkisebb számot keressük, nem kezdhetünk 0-val. Most is írjuk a lehető legkisebb számjegyeket, amíg lehet. 1024375869 a feltételeknek megfelelő szám. 4 helyére nem kerülhetne 3, mert a lehető legkisebb számokat is választva egy csoportba, túllépnénk a 17-et. Így 4,3 a legjobb folytatás. 7 helyére nem kerülhetne 5 vagy 6, mert egyik csoportot sem tudnánk 17-re kiegészíteni. Innen csak egyféleképpen lehet befejezni.

Tehát a legnagyobb megfelelő szám a 9876524130, míg a legkisebb a 1024375869.



XXXIX. VERSENY 2009–10.

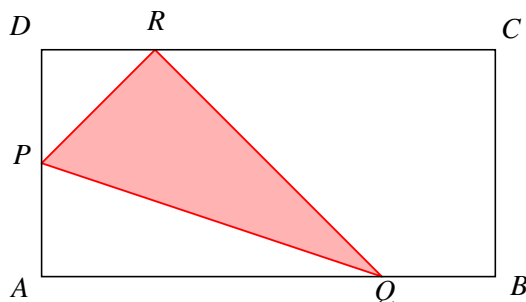
FELADATOK

Megyei forduló

1. Tamásnak 1680 Ft-tal több pénze van, mint testvérének, Rékának. Tamás ad 900 Ft-ot Rékának. Most kinek lett több pénze és mennyivel? →
2. A tízes számrendszerben felírt első 300 pozitív egész szám között hány olyan van, amelyben a számjegyek összege páros szám? →
3. Egy tömör fakockát egyik lapjával párhuzamos síkokkal feldarabolunk. Hány síkkal vágtuk szét a kockát, ha tudjuk, hogy a keletkezett testek együttes felszíne háromszorosa a kocka felszínének? →
4. Számítsuk ki a tízes számrendszerben felírt első 200 pozitív egész szám számjegyeinek összegét. →

Megyei forduló

1. Számítsuk ki a tízes számrendszerben felírható háromjegyű pozitív egész számok számjegyeinek összegét. →
2. Berci meséli, hogy dédapja, aki a 19. század második felében született, az x^2 évszámmal jelölt évben éppen x éves volt. Mikor született Berci dédapja? →
3. Az $ABCD$ téglalap AB oldala kétszerese a BC oldalnak. P az AD felezőpontja, Q az AB oldal B -hez közelebbi negyedelő pontja, végül R a CD oldal D -hez közelebbi negyedelő pontja. Hányad része a PQR háromszög területe az $ABCD$ téglalap területének? →



4. Zsolt összeadta a pozitív egész számokat 1-től 2009-ig, és azt állítja, hogy a kapott szám osztható 123-mal. Igaza van-e? (Állításodat indokold!) →

Megyei forduló

1. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 119 átlója van? 
2. Az $\frac{1}{7}$ végtelen tizedes tört alakjából a tizedesvessző utáni első 2010 számjegyet töröljük. Az így kapott szám tehát a tizedesvessző után az $\frac{1}{7}$ tizedes tört alakjának a tizedesvessző utáni 2011. számjegyével kezdődik, és azután folytatódik a többi utána következővel. A kapott szám kisebb vagy nagyobb, mint $\frac{1}{7}$? 
3. Az ABC háromszögben meghúztuk a CD magasságot és a BE szögfelezőt. Ezek metszéspontja P . Tudjuk, hogy $BP = PE$ és $CP = 2PD$. Mekkora az ABC háromszög szögei? 
4. Adjunk meg 500, egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy a leírásukhoz összesen 2010 számjegyre legyen szükség. 
5. Tudjuk, hogy a 2^n szám utolsó három számjegye megegyezik. (n pozitív egész szám.) Mi lehet ez a számjegy? 

Megyei forduló

1. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre igaz, hogy $2^p + 1$ osztható 9-cel? 
2. Adjunk meg olyan $n > 0$ egész számot, hogy $5n$ egy egész szám ötödik hatványa, $6n$ egy egész szám hatodik hatványa, és $7n$ is egy egész szám hetedik hatványa legyen. 
3. Az ABC derékszögű háromszögben az $ABC \sphericalangle = 90^\circ$, a $CAB \sphericalangle = 50^\circ$. A P és Q pontok a BC befogó olyan pontjai, amelyekre a $PAC \sphericalangle = 10^\circ$ és a $QAB \sphericalangle = 10^\circ$. Határozzuk meg a $\frac{CP}{QB}$ arányt. 
4. Az a és b pozitív számok. Tudjuk, hogy $\frac{1}{4} < a(1 - b)$. Melyik nagyobb, a vagy b ? 
5. Két szomszédos pozitív egész szám köbének különbsége n^2 , ahol $n > 0$ egész szám. Igazoljuk, hogy n két négyzetszám összege.
(Például: $8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2$, $13 = 2^2 + 3^2$) 

Országos döntő

1. Hány olyan 5-re végződő négyjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amelyben minden számjegy különböző? 
2. A tízes számrendszerben melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek a számjegyeit összeadva 2010-et kapunk? 
3. 27 egyforma szabályos dobókockából egy nagyobb kockát építünk. Úgy rakjuk össze a dobókockákat, hogy a nagy kocka felszínén a lehető legkevesebb pont látszódjon. Hány pont lesz ez? Ha a legtöbb pontot akarjuk látni a nagy kocka felszínén, mennyi pont lesz ez? (A szabályos dobókocka szemközti lapjain a pontok számának összege 7.) 
4. Egy matematikaversenyen az egyik iskola felső tagozatáról összesen 48 versenyző indult. 4 teremben ültették le a versenyzőket, minden teremben ugyanannyit. Kiderült, hogy bármely elosztásnál minden terembe jutott lány is. Legkevesebb hány lány indult a versenyen? 

Országos döntő

1. Keressünk olyan, csupa különböző számjegyekből álló háromjegyű számot, amelynek a számjegyeiből képezhető különböző számjegyekből álló összes kétjegyű számok összege egyenlő a háromjegyű számmal! 
2. Melyik az a pozitív szám, amelynek a felét és a negyedét összeszorozva a szám négyszeresét kapjuk? 
3. Hány olyan négyjegyű szám van, amely két páratlan számjegyet és két, 0-tól különböző páros számjegyet tartalmaz, és csupa különböző számjegyből áll? 
4. Van 9 (egyforma) egybevágó kis négyzetünk, 3 piros, 3 kék, 3 sárga. Ezekből hányféle 3x3-as nagyobb négyzetet lehet összerakni azzal a kikötéssel, hogy minden sorban és minden oszlopban mind a három színű kis négyzet előforduljon. Két nagy négyzetet nem tekintünk különbözőnek, ha elforgatással egymásba vihetők. 

Országos döntő

1. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik? 
2. Egy óvodában a gyerekek minden nap almát és körtét kapnak, és mindig ugyanannyi almát esznek meg, mint ahány körtét. A fiúk egy nap 3 almát és 2 körtét, a lányok 1 almát és 3 körtét esznek meg. Hányszor annyi fiú jár az óvodába, mint ahány lány? 
3. Egy 1000-forintost felváltunk 10 és 20 forintosokra, összesen 90 pénzürmét kapunk. Hány 10-es és hány 20-as van a 90 érme között? 
4. Az ABC szabályos háromszög oldalain a P , Q , R pontok sorra az AB , BC , CA oldalaknak a B -hez, C -hez, A -hoz közelebbi harmadoló pontjai. Mekkora az APR háromszög szögei? 

Országos döntő

1. Adjunk meg olyan $\overline{abcde}$ ötjegyű, tízes számrendszerben felírt számot (a, b, c, d, e számjegyek), hogy az $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ kétjegyű számok négyzetszámok legyenek. 
2. Hány olyan páros, pozitív egész szám van az első 1000 szám között, amelyeknek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege páratlan? 
3. Számítsuk ki az 1, 3, 5, 7 számjegyekből felírható összes, csupa különböző számjegyből álló négyjegyű számok összegét! 
4. Egy kocka hat lapjának síkjai hány részre darabolják fel a teret? 

Országos döntő

1. Tudjuk, hogy 2^{29} tízes számrendszerbeli alakja 9-jegyű, és csupa különböző számjegyből áll. Igazoljuk, hogy a 0 szerepel a számjegyek között. →
2. Jelölje $n!$ („ n faktoriális”) a következő szorzatot: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (például: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$). Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ egy pozitív egész szám négyzete? →
3. Egy négyzet mindkét átlóját mindkét irányban meghosszabbítjuk, és rámérjük a négyzet oldalát. Igazoljuk, hogy az így kapott négyszög is négyzet, és oldalának hossza az eredeti négyzet oldalának és átlójának összege. →
4. Mutassuk meg, hogy annak a tízes számrendszerben fölírt 16-jegyű A számnak, amelynek minden számjegye 1, legalább négy A -nál kisebb, de 1-nél nagyobb osztója van. →
5. Legkevesebb hányféle színű egység élű kis kockára van szükségünk ahhoz, hogy össze tudjunk rakni belőlük egy $4 \times 4 \times 4$ -es nagyobb kockát a következő megkötéssel: ha a két kis kocka lappal, éllel, vagy csúccsal érintkezik, akkor azok különböző színűek? →

Országos döntő

1. Két pozitív egész szám összege 210. Lehet-e, hogy a két szám szorzata osztható 210-zel? →
2. Fel lehet-e darabolni egy konvex 17-szöget 14 háromszögre? →
3. Az $\overline{abcabc}$ alakú (a, b, c számjegyek) tízes számrendszerbeli számok között van-e négyzetszám? →
4. Egy asztalon van 5 erszény, mindegyikben valamennyi pénz. Az elsőből kivesszük a benne lévő pénz ötödét, és a másodikba tesszük. Ezután a másodikból vesszük ki a benne lévő pénz ötödrészét, és a harmadikba tesszük, és így tovább. Utoljára az ötödik erszényben lévő pénz ötödét vettük ki, és az első erszénybe tettük. Így végül mindegyik erszényben 1600 Ft lesz. Mennyi pénz volt eredetileg az erszényekben? →

Országos döntő

1. Mutassuk meg, hogy az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$$

összeadás elvégzése után kapott tört számlálója osztható 101-gyel.



2. Igazoljuk, hogy 10 bármely egész kitevőjű hatványa felírható két négyzetszám összegeként.



3. Egy folyó partján az A és B város 20 km-re van egymástól. Egy csónak A -ból B -be és vissza 10 óra alatt tette meg az utat. Felfelé 2 km-t tett meg ugyanannyi idő alatt, mint lefelé 3 km-t. Mekkora a folyó sebessége?



4. Egy derékszögű háromszögről tudjuk, hogy az egyik befogóra mint átmérőre rajzolt kör az átfogót $1 : 3$ arányban osztja fel. Mekkora a háromszög hegyesszögei?



5. Egy négyzetrácsos lapon megrajzolunk n olyan téglalapot ($n \geq 1$ egész), amelynek oldalai a rácsvonalakkal párhuzamosak. Legfeljebb hány részre osztják ezek a téglalapok a síkot?



Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$ egész szám, akkor az

$$n + 1, 2n + 1, 3n + 1, 4n + 1, \dots$$

sorozatban mindig van négyzetszám, és mindig van köbszám is.



2. A -ból B -be indult egy gyalogos, vele egy időben B -ből A -ba ugyanazon az úton elindult egy kerékpáros. Egy óra múlva a gyalogos pontosan a félúton volt A és a kerékpáros között. Újabb 15 perc múlva a gyalogos és a kerékpáros találkozott, majd a gyalogos folytatta útját B -be. Mennyi ideig tartott a gyalogos útja A -ból B -be?



3. Az $ABCD$ négyzet belsejében adjuk meg azokat a P pontokat, amelyekre

$$AP + CP = BP + DP$$

teljesül.



4. Igazoljuk, hogy bárhogyan is adunk meg 51 darab, 100-nál nem nagyobb pozitív egész számot, mindig ki lehet választani közülük kettőt úgy, hogy a kiválasztottak hányadosa 2-nek pozitív egész hatványa.



MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

1. Tamásnak 1680 Ft-tal több pénze van, mint testvérének, Rékának. Tamás ad 900 Ft-ot Rékának. Most kinek lett több pénze és mennyivel?

Ha Rékának most a forintja van, akkor Tamásnak $1680 + a$ forintja van. Miután Tamás adott 900 forintot Rékának, neki $780 + a$ forintja maradt. Rékának $900 + a$ forintja lett. Tehát, most Rékának lett több pénze, méghozzá 120 forinttal. 

2. A tízes számrendszerben felírt első 300 pozitív egész szám között hány olyan van, amelyben a számjegyek összege páros szám?

Az első 9 pozitív egész között 4 olyan szám van, amelyben a számjegyek párosak. Ezután 10-től 19-ig, 20-tól 29-is és így tovább (az utolsó 290 – 299) minden ilyen 10-es csoportban 5 olyan szám van, amelyben a számjegyek összege páros. A 300 számjegy összege páratlan. Így a páros számjegyösszegű pozitív egész számok száma 300-ig $4 + 5 \cdot 29 = 149$.

Megjegyzés. Ha n olyan szám, ami nem 9-esre végződik, akkor n és $n + 1$ közül az egyik jegyeinek az összege páros, a másiké páratlan. 0 és 299 között tehát a számok felének, 150-nek lesz páros a jegyösszege. 

3. Egy tömör fakockát egyik lapjával párhuzamos síkokkal feldarabolunk. Hány síkkal vágtuk szét a kockát, ha tudjuk, hogy a keletkezett testek együttes felszíne háromszorosa a kocka felszínének?

Ha a kockát egy lapjával párhuzamos síkkal ketté vágjuk, akkor a keletkezett darabok együttes felszíne két kockalap területével nő. Eredetileg 6 kockalap területe a kocka felszíne, ha ezt háromszorosára akarjuk növelni, akkor 12 kockalappal kell növelni az együttes felszínt. Tehát 6 síkkal kell feldarabolnunk a kockát. 

4. Számítsuk ki a tízes számrendszerben felírt első 200 pozitív egész szám számjegyeinek összegét.

Például a következő számolási mód hamar célhoz vezet. Vegyük be a számok közé a 0-t is, ennek a „számjegyösszege” 0, nem változtat az összegben. 0, 1, 2, ..., 199 számokból párokat képzünk, amelyekben a számjegyösszeg ugyanannyi. Ezek a párok: $\{0, 199\}$, $\{1, 198\}$, $\{2, 197\}$, ..., $\{99, 100\}$. Minden párban a számjegyek összege 19, összesen 100 pár van, így ezek számjegyösszege 1900. Még a 200 számjegyeinek összegét kell hozzávenni, így összesen 1902-t kapunk. 

Megyei forduló

1. Számítsuk ki a tízes számrendszerben felírható háromjegyű pozitív egész számok számjegyeinek összegét.

Első megoldás: Az első háromjegyű szám a 100, az utolsó a 999, ez összesen 900 szám. Párosítsuk a számokat így: 100 és 999, 101 és 998, 102 és 997, ..., 549 és 550. A párokban a

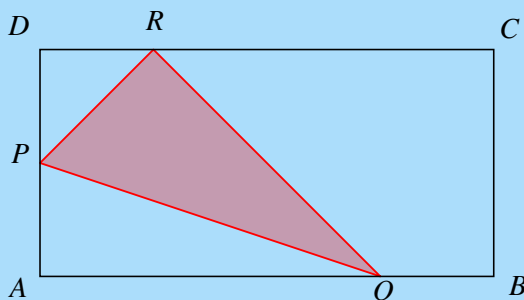
sámjegyek összege mindig 28. 450 pár van összesen, így a keresett összeg: $28 \cdot 450 = 12600$.

Második megoldás: 1-től 9-ig a számjegyek összege 45. Képzeletben írjuk le egymás alá növekvő sorrendben a 900 számot. Először adjuk össze az egyesek helyén álló számjegyeket. 100-tól 999-ig 90 olyan számcsoport van, amelyben az egyesek helyén a számjegyek 1-től 9-ig állnak. Ezek összege $90 \cdot 45 = 4050$. Két kerek század között a tízesek helyén minden számjegy 10-szer szerepel egymás után. Ez 9 alkalommal ismétlődik. A számjegyek összege: $9 \cdot 10 \cdot 45 = 4050$. A századok helyén 1-től 9-ig minden számjegy 100-szor szerepel. Ezek összege $100 \cdot 45 = 4500$, ezek összesen: $4050 + 4050 + 4500 = 12600$. 

2. Berci meséli, hogy dédapja, aki a 19. század második felében született, az x^2 évszámmal jelölt évben éppen x éves volt. Mikor született Berci dédapja?

Milyen x értékek jöhetnek szóba? Ha $x = 43$, akkor $x^2 = 1849$, vagyis akkor 1806-ban született volna a dédapja, de az nem a 19. század második fele. Ha $x = 45$, akkor $x^2 = 2025$, vagyis akkor 1980-ban született volna, ami szintén nem jó. Így egyedül az $x = 44$ érték jöhet szóba. Ekkor $x^2 = 1936$, amiből következik, hogy 1892-ben születhetett dédapja. Ez meg is felel a feltételeknek. 

3. Az $ABCD$ téglalap AB oldala kétszerese a BC oldalnak. P az AD felezőpontja, Q az AB oldal B -hez közelebbi negyedelő pontja, végül R a CD oldal D -hez közelebbi negyedelő pontja. Hányad része a PQR háromszög területe az $ABCD$ téglalap területének?



Számoljuk a PQR háromszög területét úgy, hogy levonjuk a téglalap területéből az APQ és DPR háromszögek területét és a $BCRQ$ trapéz területét. A $BCRQ$ trapéz területe fele a téglalap területének. Az APQ háromszög AQ oldala háromnegyed része AB -nek, AP magassága fele AD -nek. Emiatt a területe $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ része a téglalap területének. A DPR háromszög területe hasonló okokból $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ része a téglalap területének. Akkor tehát a PQR háromszög területe $1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ része a téglalap területének. 

4. Zsolt összeadta a pozitív egész számokat 1-től 2009-ig, és azt állítja, hogy a kapott szám osztható 123-mal. Igaza van-e? (Állításodat indokold!)

A pozitív egészek összege 1-től 2009-ig: $\frac{1+2009}{2} \cdot 2009$.

Vagyis $1005 \cdot 2009 = 3 \cdot 5 \cdot 61 \cdot 7^2 \cdot 41 = 123 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 61$, amiből következik, hogy az összeg osztható 123-mal. 

Megyei forduló

1. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 119 átlója van?

Ha a konvex sokszög oldalainak száma n , akkor az átlók száma: $\frac{n(n-3)}{2}$. Tehát tudjuk, hogy

$$\frac{n(n-3)}{2} = 119.$$

Ebből következik, hogy $n(n-3) = 238$. Mivel $17 \cdot 14 = 238$, ezért $n = 17$. A sokszögnek tehát 17 oldala van. 

2. Az $\frac{1}{7}$ végtelen tizedes tört alakjából a tizedesvessző utáni első 2010 számjegyet töröljük. Az így kapott szám tehát a tizedesvessző után az $\frac{1}{7}$ tizedes tört alakjának a tizedesvessző utáni 2011. számjegyével kezdődik, és azután folytatódik a többi utána következővel. A kapott szám kisebb vagy nagyobb, mint $\frac{1}{7}$?

Az $\frac{1}{7}$ végtelen tizedes tört alakja a következő:

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \dots$$

azaz periodikus végtelen tizedes tört, ahol a periódus hossza 6. Mivel 2010 osztható 6-tal ($2010 = 6 \cdot 335$), így pontosan 335 teljes periódust töröltünk. Így a megmaradó szám pontosan úgy néz ki, mint az eredeti. A kapott szám tehát pontosan egyenlő $\frac{1}{7}$ -del. 

3. Az ABC háromszögben meghúztuk a CD magasságot és a BE szögfelezőt. Ezek metszéspontja P . Tudjuk, hogy $BP = PE$ és $CP = 2PD$. Mekkora az ABC háromszög szögei?

Állítsunk P -ből merőlegest BC -re és EC -re. Ezek talppontjai F és G . Mivel P a szögfelező pontja, így $PD = PF$. De tudjuk, hogy $PC = 2 \cdot PD$, ezért $PC = 2 \cdot PF$. Emiatt a PFC derékszögű háromszög szögei 30° és 60° . Mivel CD a háromszög magassága, így a BCD háromszög derékszögű és azt is tudjuk már, hogy $\angle PCB = 30^\circ$, így $\angle ABC = \angle DBC = 60^\circ$. Emiatt $\angle DPB = 60^\circ$, amiből következik, hogy $\angle EPC = 60^\circ$ (hiszen csúcshökök). Mivel BP szögfelező, ezért $\angle PBC = 30^\circ$, vagyis a BCP egyenlőszárú, és $BP = PC$. De $BP = PE$, vagyis $PE = PC$. Így a PCE háromszögben a CE oldalon fekvő szögek egyenlők. De a $\angle CPE = 60^\circ$, így $\angle PEC = \angle PCE = 60^\circ$. Tehát az ABC háromszög szögei 30° , 60° , 90° .

Megjegyzés. A megoldást ábrán érdemes követni. Azért nem rajzoltunk ábrát, mert a helyes ábrán egy derékszögű háromszög van. Emiatt esetleg indokolatlan következtetéseket vonnánk le, amelyek a feladat szövegéből nem következnek. 

4. Adjunk meg 500, egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy a leírásukhoz összesen 2010 számjegyre legyen szükség.

Mivel $2010 = 4 \cdot 490 + 5 \cdot 10$, ezért 490 négyjegyű és 10 ötjegyű szám leírásához éppen 2010 számjegyre van szükség. Így a következő számok megfelelők:

$$9510, 9501, \dots, 9999, 10000, 10001, \dots, 10009.$$



5. Tudjuk, hogy a 2^n szám utolsó három számjegye megegyezik. (n pozitív egész szám.) Mi lehet ez a számjegy?

Mivel 2^n legalább háromjegyű, emiatt n biztosan nagyobb 3-nál, tehát 2^n osztható 8-cal. Azt pedig tudjuk, hogy egy 8-cal osztható szám utolsó 3 jegye által alkotott szám is osztható 8-cal. Nyilván páros ez a szám, így a 222, 444, 666 és 888 jön szóba. Ezek közül viszont csak a 888 osztható 8-cal, tehát csak a 8-as lehet ez a számjegy. Szerencsére létezik olyan 2-hatvány, aminek az utolsó három számjegye 8-as: $2^{39} = 549755813888$.



Megyei forduló

1. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre igaz, hogy $2^p + 1$ osztható 9-cel?

Vizsgáljuk a p prímszámot 6-tal való osztási maradéka szerint!

Ha $p = 2$, akkor $2^2 + 1 = 5$ nem osztható 9-cel.

Ha $p = 3$, akkor $2^3 + 1 = 9$, tehát $p = 3$ jó.

Ha $p > 3$ prím, akkor nem osztható se 2-vel, se 3-mal, ezért 6-tal való osztási maradéka 1 vagy 5 lehet.

Ha $p = 6k + 1$ valamely k egész számra, akkor

$$2^p + 1 = 2^{6k+1} + 1 = 2 \cdot (2^6)^k + 1 = 2 \cdot 64^k + 1.$$

64 9-cel osztva 1 maradékot ad, ezért 64^k is, tehát $2^p + 1$ 9-cel osztva 3 maradékot ad.

Ha $p = 6k + 5$ valamely k egész számra, akkor

$$2^p + 1 = 2^{6k+5} + 1 = 2^5 \cdot (2^6)^k + 1 = 32 \cdot 64^k + 1.$$

64^k 9-cel osztva 1 maradékot ad, míg a 32 5-öt, ezért $2^p + 1$ 9-cel osztva 6 maradékot ad.

Tehát a 3 az egyetlen megfelelő prímszám.



2. Adjunk meg olyan $n > 0$ egész számot, hogy $5n$ egy egész szám ötödik hatványa, $6n$ egy egész szám hatodik hatványa, és $7n$ is egy egész szám hetedik hatványa legyen.

Egy szám pontosan akkor k -adik hatvány, ha prímtényezői felbontásában minden prím kitevője osztható k -val.

Ezek alapján n -ben az 5 kitevője $5k + 4$ alakú. 6, illetve 7 relatív príme az 5-höz, ezért $5k + 4$ osztható 6-tal és 7-tel, így 42-vel is. A legkisebb ilyen szám a 84.

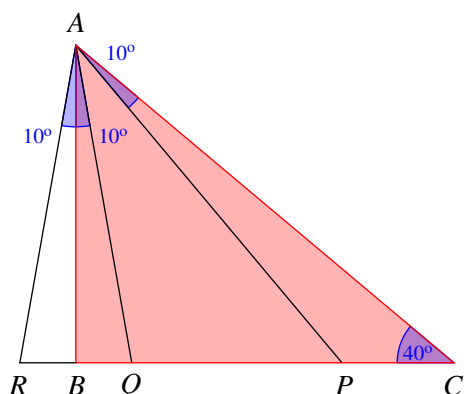
$6 = 2 \cdot 3$, ezért hasonló okoskodással n -ben a 2 és a 3 kitevője $6k + 5$ alakú, és osztható 5-tel, és 7-tel. A legkisebb ilyen szám a 35.

A 7 kitevője $7k + 6$ alakú, és osztható 5-tel és 6-tal. a legkisebb ilyen szám a 90.

Tehát például egy ilyen alakú n alkalmas: $n = 2^{35} \cdot 3^{35} \cdot 5^{84} \cdot 7^{90}$.



3. Az ABC derékszögű háromszögben az $\angle ABC = 90^\circ$, a $\angle CAB = 50^\circ$. A P és Q pontok a BC befogó olyan pontjai, amelyekre a $\angle PAC = 10^\circ$ és a $\angle QAB = 10^\circ$. Határozzuk meg a $\frac{CP}{QB}$ arányt.



Jelölje R a Q pont B -re vonatkozó tükörképét, ekkor

$$RA = RQ \text{ és } RB = BQ$$

$$QA = QC, \text{ mert } \angle QAC = \angle QCA = 40^\circ.$$

$$QA = RA = RP, \text{ mert } \angle RAP = \angle RPA = 50^\circ. \text{ Tehát}$$

$$RP = QC.$$

$$RQ = RP - QP = QC - QP = CP, \text{ tehát } 2QB = RQ = CP, \text{ így}$$

$$\frac{CP}{QB} = 2.$$



4. Az a és b pozitív számok. Tudjuk, hogy $\frac{1}{4} < a(1-b)$. Melyik nagyobb, a vagy b ?

Az $\frac{1}{4} < a(1-b)$ egyenlőtlenség ekvivalens az $\frac{1}{2} < \sqrt{a(1-b)}$ egyenlőtlenséggel, mert ha az első teljesül, akkor $a(1-b)$ nemnegatív, ezért vonhatunk négyzetgyököt, és kisebb szám négyzetgyöke kisebb. Visszafele mindkét oldal nemnegatív, a kisebb négyzete is kisebb.

$\frac{1}{4} < a(1-b)$ miatt $1-b$ is pozitív. Ezért alkalmazhatjuk az a és $1-b$ számokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, azaz $\sqrt{a(1-b)} < \frac{a+1-b}{2}$.

Tehát $\frac{1}{2} < \frac{a+1-b}{2}$, azaz $0 < a-b$. Azt kaptuk, hogy $a > b$.



5. Két szomszédos pozitív egész szám köbének különbsége n^2 , ahol $n > 0$ egész szám. Igazoljuk, hogy n két négyzetszám összege.

(Például: $8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2$, $13 = 2^2 + 3^2$)

A feltétel szerint $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 = 3k(k+1) + 1 = n^2$.

$3k(k+1)$ páros, hiszen két szomszédos szám szorzatának háromszorosa, így n^2 és n páratlan.

Az első egyenletet 4-gyel megszorozva kapjuk, hogy

$$(2n)^2 = 4 \cdot (3k^2 + 3k + 1) = 3(2k+1)^2 + 1,$$

innen $3(2k+1)^2 = (2n)^2 - 1 = (2n+1)(2n-1)$. $(2n+1)$ és $(2n-1)$ relatív prímelek, mert legnagyobb közös osztójuk csak a 2 lehetne, de mindkettő páratlan. Szorzatuk egy négyzetszám háromszorosa, mivel relatív prímelek az egyik osztható hárommal, a másik nem. Amelyik nem osztható hárommal az négyzetszám lesz, hiszen minden más prímtenyező a szorzatban páros kitevőn szerepel, és ez a prím csak az egyiket oszthatja.

Ha $2n+1$ négyzetszám, akkor $2n+1 = (2t+1)^2$ valamilyen t -re, vagyis $2n+1 = 4t^2 + 4t + 1$, azaz $2n = 4t^2 + 4t$, amiből $n = 2t^2 + 2t$. Vagyis ekkor n páros lenne, ami nem lehet.

Ha $2n-1$ négyzetszám, akkor $2n-1 = (2t+1)^2$ valamilyen t -re, azaz $2 = 4t^2 + 4t + 2$, amiből $n = 2t^2 + 2t + 1$, vagyis ekkor $n = t^2 + (t+1)^2$.

Tehát n valóban két négyzetszám összege.



Országos döntő

1. Hány olyan 5-re végződő négyjegyű tízes számrendszerbeli szám van, amelyben minden számjegy különböző?

Az ezresek helyén nem állhat 0 vagy 5, azaz 8 féle számjegy állhat az ezresek helyén. A százaskok helyére szintén 8-féle számjegy kerülhet, mert az 5-ösön, illetve az ezresek helyén álló számjegyen kívül bármi kerülhet a százaskok helyére. A tízesek helyére 7-féle számjegy közül választhatunk. Hiszen az ötösön, a százaskok illetve ezresek helyén álló számjegyen kívül bármi kerülhet a tízesek helyére, ez összesen 7-féle számjegy. Az egyesek helyén csak az ötös szerepelhet. Így összesen $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$ darab 5-re végződő, különböző jegyekből álló négyjegyű szám van. 

2. A tízes számrendszerben melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek a számjegyeit összeadva 2010-et kapunk?

Egy 223 jegyű szám jegyeinek összege legfeljebb $9 \cdot 223 = 2007$, tehát a szám legalább 224 jegyű. Ha egy 224 jegyű szám első jegye legfeljebb 2, akkor a jegyeinek az összege legfeljebb $2 + 9 \cdot 223 = 2009$. Így egy 224 jegyű, 2010 jegyösszegű szám legalább 3-mal kezdődik. Ha 3-mal kezdődik, akkor a jegyösszege csak úgy lehet 2010, ha minden további jegye 9-es. Azaz a legkisebb ilyen szám a $\underbrace{399 \dots 99}_{223}$. 

3. 27 egyforma szabályos dobókockából egy nagyobb kockát építünk. Úgy rakjuk össze a dobókockákat, hogy a nagy kocka felszínén a lehető legkevesebb pont látszódjon. Hány pont lesz ez? Ha a legtöbb pontot akarjuk látni a nagy kocka felszínén, mennyi pont lesz ez? (A szabályos dobókocka szemközti lapjain a pontok számának összege 7.)

A nagy $3 \times 3 \times 3$ -as kocka lapközepén lévő kiskockán minimum 1, maximum 6 pont látszódhat. Lapközepén elhelyezkedő kiskockából 6 van. A nagy kocka éleinek közepénél levő kiskockákon minimum $1 + 2 = 3$, maximum $5 + 6 = 11$ pont látszódhat. Az él közepén lévő kiskockából 12 van. Végül, a nagy kocka csúcsainál levő kiskockákon minimum $1 + 2 + 3 = 6$, maximum $4 + 5 + 6 = 15$ pont látszódhat, és ez meg is valósítható. Csúcson elhelyezkedő kiskockából 8 van. Tehát a minimum $6 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 8 \cdot 6 = 90$, a maximum $6 \cdot 6 + 12 \cdot 11 + 8 \cdot 15 = 288$. 

4. Egy matematikaversenyen az egyik iskola felső tagozatáról összesen 48 versenyző indult. 4 teremben ültették le a versenyzőket, minden teremben ugyanannyit. Kiderült, hogy bármely elosztásnál minden terembe jutott lány is. Legkevesebb hány lány indult a versenyen?

Minden teremben pontosan $\frac{48}{4} = 12$ -en ültek le. Legfeljebb 11 fiú lehetett, hiszen ha több mint 11 fiú versenyzett volna, akkor egy lehetséges terembeosztás lehetne az, hogy 12 fiút egy terembe ültetünk. Azaz lenne egy olyan terem, ahova nem kerülne lány, ez ellentmond a feladat feltételeinek. Tehát legalább $48 - 11 = 37$ lány indult a versenyen. 

Országos döntő

1. Keressünk olyan, csupa különböző számjegyekből álló háromjegyű számot, amelynek a számjegyeiből képezhető különböző számjegyekből álló összes kétjegyű számok összege egyenlő a háromjegyű számmal!

Az $\overline{abc}$ háromjegyű szám jegyeiből hat kétjegyű szám képezhető: $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{ac}$, $\overline{ca}$, $\overline{bc}$, $\overline{cb}$. A hat szám összege $10 \cdot a + b + 10 \cdot b + a + 10 \cdot a + c + 10 \cdot c + a + 10 \cdot b + c + 10 \cdot c + b = 22 \cdot (a + b + c)$. Tehát a keresett háromjegyű szám 22 többszöröse lesz. Tekintsük a 22 többszöröseit 22, 44, 66, 88, 110, 132, 154, Az első különböző számjegyekből álló háromjegyű szám jó is lesz, mert $132 = 22 \cdot (1 + 3 + 2)$. (De például a 154 nem jó, mivel $154 \neq 22 \cdot (1 + 5 + 4)$).

Megjegyzés. Keressük meg az összes ilyen számot! Az eddigiek szerint $22 \cdot (a + b + c) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ kell, hogy teljesüljön. Ezt rendezve $78 \cdot a = 12 \cdot b + 21 \cdot c$, hárommal osztva $26 \cdot a = 4 \cdot b + 7 \cdot c$. Mivel számjegyekről van szó, a jobb oldal legfeljebb $4 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 99$ lehet, így $a \leq 3$. Az egyenlet bal oldalán páros szám áll, így a jobb oldal is páros kell, hogy legyen. Ez csak akkor lehet, ha c páros.

Ha $a = 1$, akkor, mivel $7 \cdot 4 > 26$, c csak 2 lehet, amiből következik, hogy $b = 3$, azaz ebből az esetből a 132 adódik. Ha $a = 2$, akkor, mivel $7 \cdot 8 > 52$, akkor c 2, 4, vagy 6 lehet. Mivel 52 és 4 is osztható négygyel, így c -nek is oszthatónak kell lennie négygyel. Ez csak $c = 4$ esetén lehet, amiből $b = 6$, azaz a 264 adódik. Ha $a = 3$, akkor c páros, de nem osztható négygyel, mert $26 \cdot 3$ sem osztható négygyel. Ez csak $c = 2$ vagy $c = 6$ esetén lehet, amiből $b = 15$ vagy $b = 6$ adódik. Mivel a 15 nem számjegy, ebből az esetből csak a 396-ot kapjuk.

Ha a nulla a jegyek között lenne (azaz a háromjegyű szám $ab0$ vagy $a0b$ alakú), akkor ennek a számjegyeiből csak négy kétjegyű szám lehetne képezhető: $ab, ba, a0, b0$. Ezek összege $21 \cdot (a + b)$. Az előzőekhez hasonlóan, az eseteket végignévezve (használva hozzá a 3-mal, illetve 9-cel való oszthatóságot) könnyen látható, hogy innét nem jön megoldás. 

2. Melyik az a pozitív szám, amelynek a felét és a negyedét összeszorozva a szám négyszeresét kapjuk?

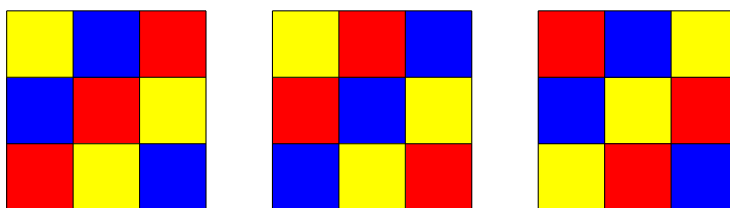
Jelölje x a keresett számot. A feladat szövege szerint $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4} = 4 \cdot x$, azaz $x \cdot x = 32 \cdot x$. Mivel x pozitív, oszthatunk vele, $x = 32$ adódik. 

3. Hány olyan négyjegyű szám van, amely két páratlan számjegyet és két, 0-tól különböző páros számjegyet tartalmaz, és csupa különböző számjegyből áll?

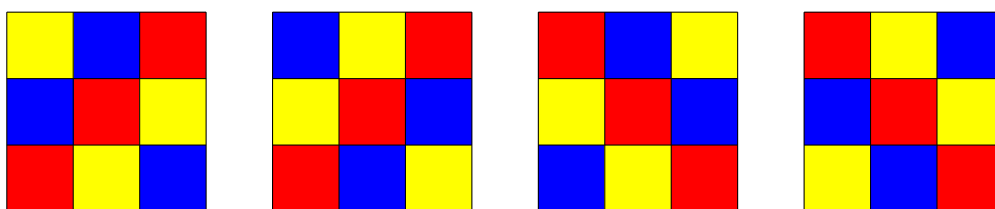
A megoldás $6 \cdot (5 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 3) = 1440$. Hatféleképpen választhatjuk meg azt, hogy a négy jegy közül melyik kettő legyen páratlan. Mivel 5 páratlan számjegy van, a kiválasztott két helyből az elsőre 5-féle páratlan jegyet írhatunk, a másodikra ez a jegy nem kerülhet, azaz ott már csak négy jegy közül választhatunk. A 0-t nem számítva 4 páros számjegy van, tehát a maradék két helyből az elsőre 4-féle páros jegyet írhatunk, a másodikra 3-félét. 

4. Van 9 (egyforma) egybevágó kis négyzetünk, 3 piros, 3 kék, 3 sárga. Ezekből hányféle 3×3 -as nagyobb négyzetet lehet összerakni azzal a kikötéssel, hogy minden sorban és minden oszlopban mind a három színű kis négyzet előforduljon. Két nagy négyzetet nem tekintünk különbözőnek, ha elforgatással egymásba vihetők.

Az összes (három) megoldás a következő ábrán látható:



Miért nincsen több megoldás? Ha például piros a 3×3 -as nagy négyzet középső kis négyzete, akkor még két szemközti saroknak kell pirosnak lennie, mivel minden sorban és minden oszlopban kell, hogy legyen piros kis négyzet. Tehát ebben az esetben valamelyik átló mentén piros kis négyzetek lesznek. Ha most az elforgatással nem törődünk, akkor ezt összesen 4-féleképpen lehet befejezni:



Azonban ez a négy lehetőség elforgatással egymásba vihető. Ezt a gondolatmenetet a többi színnel is eljátszhatjuk, tehát további egy-egy megoldás adódik abból, hogy kék, illetve sárga négyzet kerül középre.



Országos döntő

1. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik?

Összesen 5^4 különböző négyjegyű szám készíthető ezekből a számjegyekből, hiszen minden helyiértéken 5-féle számjegy állhat. Ezek közül $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ olyan, amiben minden számjegy különböző, hiszen az első helyen mind az 5-féle számjegy állhat, de utána már csak 4, hogy különbözzön az elsőől, a harmadik számjegy már csak 3-féle lehet, hogy különbözzön az első kettőtől stb. Olyan számból tehát, amiben legalább egy számjegy ismétlődik, éppen

$$5^4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 = 625 - 120 = 505$$

darab van.



2. Egy óvodában a gyerekek minden nap almát és körtét kapnak, és mindig ugyanannyi almát esznek meg, mint ahány körtét. A fiúk egy nap 3 almát és 2 körtét, a lányok 1 almát és 3 körtét esznek meg. Hányszor annyi fiú jár az óvodába, mint ahány lány?

Ha a lányok száma l , a fiúké pedig f , akkor egy nap $l + 3f$ almát és $3l + 2f$ körtét esznek meg. Mivel ugyanannyi almát esznek összesen, mint körtét, így tudjuk, hogy $l + 3f = 3l + 2f$. Ebből következik, hogy $f = 2l$, vagyis kétszer annyi fiú van, mint ahány lány.



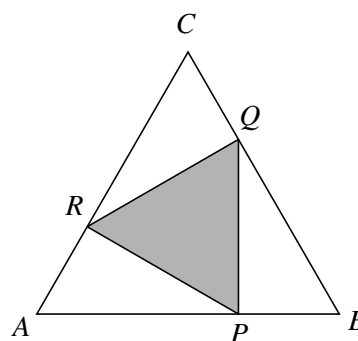
3. Egy 1000-forintost felváltunk 10 és 20 forintosokra, összesen 90 pénzürmét kapunk. Hány 10-es és hány 20-as van a 90 érme között?

Első megoldás: Tegyük fel, hogy t darab 10-esünk van, és h darab 20-asunk. Mivel összesen 1000 forintot érnek, ezért $10t + 20h = 1000$. Ebből következik, hogy $t + 2h = 100$. Másrészt viszont összesen 90 érménk van, vagyis $t + h = 90$. A két egyenletből kapjuk, hogy $h = 10$, és így $t = 80$, vagyis 80 darab 10-esünk van, és 10 darab 20-asunk.

Második megoldás: Ha csupa 10-esünk lenne, akkor 900 forintot érne a 90 érme. Ha egy 10-est becserélünk 20-asra, akkor az érme száma nem változik, de az összértékük 10 forintra nő. Mivel 100 forintra ér kevesebbet a 90 darab 10-es a kívánt 1000 forintra, így pontosan 10-et kell becserélnünk. Vagyis 10 darab 20-asunk és 80 darab 10-esünk van. 

4. Az ABC szabályos háromszög oldalain a P , Q , R pontok sorra az AB , BC , CA oldalaknak a B -hez, C -hez, A -hoz közelebbi harmadoló pontjai. Mekkora az APR háromszög szögei?

Mivel az ABC háromszög szabályos, ezért minden oldala egyforma hosszú. Ha nézzük az APR háromszöget, akkor ebben a háromszögben az AP oldal kétszer olyan hosszú, mint az AR . Így tehát az APR háromszög egy „fél” szabályos háromszög, hiszen az $\angle RAP = 60^\circ$. Ebből következik, hogy $\angle APR = 30^\circ$ és $\angle ARP = 90^\circ$. 



Országos döntő

1. Adjunk meg olyan $\overline{abcde}$ ötjegyű, tízes számrendszerben felírt számot (a, b, c, d, e számjegyek), hogy az $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ kétjegyű számok négyzetszámok legyenek.

A kétjegyű négyzetszámok a következők: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Írjuk fel, hogy melyik számot melyik követheti. A 25 előtt és után sem lehet semmi, hiszen nincs 2-re végződő és 5-tel kezdődő megfelelő négyzetszám sem. Ha 81-gyel kezdünk, akkor kapjuk a $81 \rightarrow 16 \rightarrow 64 \rightarrow 49$ sorozatot, ha pedig 36-tal, akkor a $36 \rightarrow 64 \rightarrow 49$ sorozatot. Ebből látható, hogy egyetlen 4-tagú lánc van, a 81-gyel kezdődő, ezért az egyetlen lehetséges szám a 81649. 

2. Hány olyan páros, pozitív egész szám van az első 1000 szám között, amelyeknek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege páratlan?

Az egyjegyűek között nincs ilyen, hiszen ott a szám megegyezik a számjegyek összegével és az nem lehet egyszerre páros és páratlan is. Ha a kétjegyű számokat nézzük, akkor tudjuk, hogy az utolsó jegyük páros, hiszen a szám maga páros. Vagyis az utolsó jegy 5-féle lehet. Viszont az első jegynek páratlannak kell lennie ahhoz, hogy a számjegyek összege páratlan legyen, így erre is 5-féle lehetőség van. Összesen tehát $5 \cdot 5 = 25$ megfelelő kétjegyű szám van. Háromjegyűek esetén az utolsó jegy továbbra is páros, ami 5-féle lehetőség. Ha a második jegy páratlan, akkor az elsőnek párosnak kell lennie, vagyis ilyenből $4 \cdot 5 \cdot 5$ darab van, hiszen az első számjegy nem lehet 0. Ha a második jegy is páros, akkor viszont $5 \cdot 5 \cdot 5$ lehetőségünk van, ekkor ugyanis nincsen

tiltott számjegy az első helyen. Így tehát összesen

$$5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 + 100 + 125 = 250$$

darab feltételeknek megfelelő szám van. 

3. Számítsuk ki az 1, 3, 5, 7 számjegyekből felírható összes, csupa különböző számjegyből álló négyjegyű számok összegét!

Képzeld el, hogy az összes számot egymás alá írjuk, hogy összeadjuk őket. Mivel csupa különböző számjegyből állnak a számok, ezért $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ szám van, és így 24 sor. Az egyes helyiértéken minden számjegy 6-szor szerepel, hiszen a maradék 3 helyen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féleképpen állhatnak számjegyek. Így az egyesek helyén a számjegyek összege $6 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 96$. De ez minden helyiértéken igaz, csak azokon egy számjegy 10-et, 100-at, illetve 1000-et ér. Vagyis összesen $96 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 96 \cdot 1111 = 106656$ a 24 szám összege. 

4. Egy kocka hat lapjának síkjai hány részre darabolják fel a teret?

Első megoldás: A kocka minden lapjához, éléhez és csúcsához csatlakozik kívülről egy térrész, illetve van a kocka belseje. Így összesen $6 + 12 + 8 + 1 = 27$ részt határoznak meg a lapsíkok.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Második megoldás: Két szemközti oldal síkja 3 „emeletre” bontja a teret és minden szinten az ábrán látható 9 rész keletkezik. Minden szinten az itt látható síkrészeknek megfelel egy térrész. Ez viszont is igaz, minden térrésznek megfelel valamelyik „emeleten” egy síkrész. Ebből következik, hogy $3 \cdot 9 = 27$ térrészt kapunk.

Harmadik megoldás: Ha Rubik-kocka középső (nem látható) kiskockájának lapsíkjait vesszük, akkor a $3 \times 3 \times 3$ kiskockából minden létrejövő térrészbe pontosan 1 kiskocka kerül. 

Országos döntő

1. Tudjuk, hogy 2^{29} tízes számrendszerbeli alakja 9-jegyű, és csupa különböző számjegyből áll. Igazoljuk, hogy a 0 szerepel a számjegyek között.

Ha a 0 nem szerepelne, akkor a számjegyek csakis az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 lehetnének. Ezek összege 45, ami osztható 3-mal, vagyis a 2^{29} is osztható kellene, hogy legyen 3-mal. Ez azonban nem igaz, így a 0 biztosan szerepel a számjegyek között. (Megjegyzés: $2^{29} = 536870912$.) 

2. Jelölje $n!$ („ n faktoriális”) a következő szorzatot: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (például: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$). Melyek azok az n pozitív egész számok, amelyekre $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ egy pozitív egész szám négyzete?

Nézzük meg az első néhány n értékre a kérdéses összeget! Az $1! = 1$ pozitív négyzetszám, az $1! + 2! = 3$ nem, az $1! + 2! + 3! = 9$ is jó, az $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ viszont nem. Ha $k \geq 5$ egész, akkor $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot k$, ami osztható $2 \cdot 5 = 10$ -zel. Tehát ha $n \geq 5$, akkor az $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + n!$ ugyanazt a maradékot adja 10-zel osztva, azaz ugyanarra a számjegyre

végződik, mint az $1! + 2! + 3! + 4! = 33$, hiszen ehhez csak 10-zel osztható számokat adtunk hozzá. Tehát a kérdéses összeg 10-zel osztva 3-at ad maradékul.

De most nézzük meg, hogy egy négyzetszám milyen maradékot adhat 10-zel osztva! Ha az x egész szám osztási maradéka 10-zel az m , akkor m^2 ugyanazt a maradékot adja 10-zel osztva, mint az x^2 , hiszen egész számok összeszorzásakor a maradékok is összeszorzódnak. Tehát az x^2 maradéka csakis az m -től függ. Az m lehetséges értékeire végignévezve az m^2 -et ($0 \leq m \leq 9$): 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Ezek egyike sem ad 3 maradékot 10-zel osztva, így x^2 sem adhat, semmilyen x egészre. Tehát semmilyen $n \geq 5$ -re nem lehet az $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ négyzetszám.

Így az egyedüli jó n -ek az 1 és a 3.



3. Egy négyzet mindkét átlóját mindkét irányban meghosszabbítjuk, és rámérjük a négyzet oldalát. Igazoljuk, hogy az így kapott négyszög is négyzet, és oldalának hossza az eredeti négyzet oldalának és átlójának összege.

Jelölje az oldal hosszát a , az átló hosszát b . A négyzet csúcsai legyenek A, B, C és D , az új pontok E, F, G és H az ábra szerint. A négyzet középpontja (az átlók metszéspontja) legyen O . Ekkor az O pont távolsága az A, B, C és D pontoktól is $\frac{b}{2}$, hiszen felezi az átlókat. Így az O távolsága az E, F, G, H pontoktól $\frac{b}{2} + a$. Tehát az O pontból való, $\frac{\frac{b}{2} + a}{\frac{b}{2}}$ arányú középpontos nagyítás viszi az $ABCD$ négyzetet az $EFGH$ négyszögbe, ami így tehát szintén négyzet.

Az E pontot az AD egyenesre áttükrözve az AD és az AB , illetve az ezzel a középpontos nagyítás miatt párhuzamos EF egyenesek merőlegessége miatt az EF szakasz egy T pontját kapjuk.

Ez a tükrözés az AC egyenest (ami átmegy az E -n) az AT egyenesbe viszi. Ez a négyzet szimmetriái miatt párhuzamos a BD egyenessel. Így az $ATFB$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, vagyis a négyszög paralelogramma. Tehát $TF = AB = a$. A tükrözés miatt pedig $AT = AE = a$. Az AT egyenes párhuzamos a BD -vel, így merőleges a másik átlóegyenesre, az AC -re. Így a TAE szög 90° -os. Ekkor viszont az ABD és AET háromszögek egybevágók, mert az A -ból induló két-két oldaluk a hosszú, és ezek közrezárt szöge 90° . Így $ET = BD = b$.

Tehát $EF = ET + TF = b + a$, és pont ezt akartuk belátni.



4. Mutassuk meg, hogy annak a tízes számrendszerben fölírt 16-jegyű A számnak, amelynek minden számjegye 1, legalább négy A -nál kisebb, de 1-nél nagyobb osztója van.

Vegyük észre, hogy ha k pozitív egész szám, akkor

$$\underbrace{11\dots1}_{2k \text{ db}} = \underbrace{11\dots1}_{k \text{ db}} \cdot \underbrace{100\dots01}_{k-1 \text{ db}}.$$

Így

$$\underbrace{11\dots1}_{16 \text{ db}} = \underbrace{11\dots1}_{8 \text{ db}} \cdot \underbrace{100\dots01}_{7 \text{ db}} = 1111 \cdot 10001 \cdot \underbrace{100\dots01}_{7 \text{ db}} = 11 \cdot 101 \cdot 10001 \cdot \underbrace{100\dots01}_{7 \text{ db}}$$

Itt minden 1-től és $\overbrace{11 \dots 1}^{16 \text{ db}}$ -től különböző tényező jó osztó. Ezekből összesen 6 darab is van, tehát ennyi jó osztót is találtunk. 

5. Legkevesebb hányféle színű egység élű kis kockára van szükségünk ahhoz, hogy össze tudjunk rakni belőlük egy $4 \times 4 \times 4$ -es nagyobb kockát a következő megkötéssel: ha a két kis kocka lappal, éllel, vagy csúccsal érintkezik, akkor azok különböző színűek?

Összesen 8-féle szín kell, és ennyi elég is. Bármely $2 \times 2 \times 2$ -es részkocka minden kis kockája szomszédos ugyanis az összes többivel lapon, élben, vagy csúcsban, és így egy ilyen rész jó kiszínezéséhez csupa különböző szín kell, azaz 8-féle szín. Ennyi pedig elég is a nagy kockához is, mert vehetjük egy $2 \times 2 \times 2$ -es kocka ilyen jó kiszínezését, és ennek 8 darab eltoltjából kirakhatunk egy $4 \times 4 \times 4$ -es kockát. Ez jó lesz, hiszen minden kis kockára a vele azonos színűek a többi $2 \times 2 \times 2$ -es blokkban ugyanolyan pozícióban állnak, vagyis minden irányban 0 vagy 2 kis kockányira vannak, tehát nem lehetnek szomszédosak vele. Így valóban pontosan 8 színre van szükség. 

Országos döntő

1. Két pozitív egész szám összege 210. Lehet-e, hogy a két szám szorzata osztható 210-zel?

Legyen a két szám a és b . Ekkor $a + b = 210$ miatt $b = 210 - a$, vagyis $ab = a(210 - a)$.

A 210 prímtényezői felbontása $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, vagyis a 210 négy különböző prímszám szorzata. Ha $ab = a(210 - a)$ osztható ezek egyikével – amit jelöljön p –, akkor a vagy $210 - a$ osztható vele, hiszen p prím. De p osztja 210-et is, így ha az egyik tényezőt osztja, akkor a másikat is. Tehát ekkor p osztja a -t. De ha a 210 osztja ab -t, akkor a négy prímtényező mindegyike is, azaz ezek mind osztják a -t is. De így 210 osztja a -t, vagyis $a \geq 210$. Tehát $b = 210 - a \leq 0$, ez azonban lehetetlen, mert b pozitív.

Így nincsenek jó a és b számok. 

2. Fel lehet-e darabolni egy konvex 17-szöget 14 háromszögre?

Nem lehet feldarabolni. Ha ugyanis felbontjuk a 17-szöget háromszögekre, akkor a 17-szög csúcspontjai szükségszerűen bizonyos háromszögek csúcspontjai is lesznek. Az egy ilyen csúcsban találkozó háromszögek ottani szögeinek összege épp a 17-szög adott csúcsbeli szögét adja ki. Így a háromszögek szögeinek összege legalább a 17-szög szögeinek összege kell legyen, hiszen minden háromszögnek egy szögét csak egy csúcsnál számolhattuk.

De a háromszög szögeinek összege 180° , így 14 háromszögre $14 \cdot 180^\circ$. Ezzel szemben a 17-szög szögeinek összege $15 \cdot 180^\circ$, hiszen ha az egy csúcsából induló 14 átlójával 15 háromszögre bontjuk, akkor ezek belső szögeinek összege pontosan a 17-szög belső szögeinek összegét adja ki.

Tehát a 17-szög szögösszege nagyobb 14 háromszög szögeinek összegénél, így a korábbiak szerint egy ilyen háromszögekre való felbontásban nem lehet pontosan 14 háromszög. 

3. Az $\overline{abcabc}$ alakú (a, b, c számjegyek) tízes számrendszerbeli számok között van-e négyzetszám?

Az $\overline{abcabc}$ számot úgy írhatjuk föl, hogy

$$1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}.$$

Ha ez négyzetszám lenne, akkor a 7, 11 és 13 prímekekkel osztható lenne, de akkor ezek négyzeteivel is, így $\overline{abc}$ is osztható lenne $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ -gyel. Ez azonban nem lehet, mert $0 < \overline{abc} < 1000$.

Tehát nincsen $\overline{abcabc}$ alakú négyzetszám.



4. Egy asztalon van 5 erszény, mindegyikben valamennyi pénz. Az elsőből kivesszük a benne lévő pénz ötödét, és a másodikba tesszük. Ezután a másodikból vesszük ki a benne lévő pénz ötöd-részét, és a harmadikba tesszük, és így tovább. Utoljára az ötödik erszényben lévő pénz ötödét vettük ki, és az első erszénybe tettük. Így végül mindegyik erszényben 1600 Ft lesz. Mennyi pénz volt eredetileg az erszényekben?

Gondolkodjunk visszafelé! Az 5. erszényből az utolsó lépésben a pénz ötödét vettük el, és 1600 Ft maradt, így előtte $1600 \cdot \frac{5}{4} = 2000$ Ft-nak kellett ott lennie, az elsőben pedig mostadtunk hozzá 400-at, és így lett 1600 Ft, vagyis 1200 Ft volt ott.

Még egyet visszalépve, a 4. lépésben a 4. erszényből a pénz ötödét tettük át az ötödikbe, és így a negyedikben 1600 Ft maradt, vagyis ott 2000-nek kellett lennie. Az átrakott 400 Ft a 4. erszénybe került, ahol így 2000 Ft lett, vagyis ott előzőleg 1600 Ft volt.

A 3. lépésben a 3. erszényből raktunk át a negyedikbe, és az előzőhöz hasonlóan 400 Ft-ot kellett átrakni, a 3. és 4. erszényben pedig előzőleg 2000, illetve 1600 Ft volt.

Ugyanígy a 2. lépés előtt a 2. erszényben 2000 Ft, a harmadikban 1600 Ft volt.

Az 1. lépés utánra tehát az erszényekben rendre 1200, 2000, 1600, 1600 és 1600 Ft volt. Az elsőből a pénz ötödét tettük át a másodikba, így az elsőben eredetileg $1200 \cdot \frac{5}{4} = 1500$ Ft volt, és 300 Ft került át a 2. erszénybe, ahol így 1700 Ft kellett, hogy legyen.

Tehát az erszényekben eredetileg rendre 1500, 1700, 1600, 1600 és 1600 Ft volt.



Országos döntő

1. Mutassuk meg, hogy az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$$

összeadás elvégzése után kapott tört számlálója osztható 101-gyel.

Csoportosítsuk az összeg tagjait kettesével a következő módon:

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{99}\right) + \dots + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{51}\right) = \frac{101}{100} + \frac{101}{2 \cdot 99} + \dots + \frac{101}{50 \cdot 51}$$

A 101 prím, és nem szerepel az összeg legkisebb közös nevezőjében prímtenyezőként, hiszen csak nála kisebb számok szerepelnek szorzótenyezőként. Ezért közös nevezőre hozás és egyszerűsítés

után a számláló továbbra is osztható lesz 101-gyel, hiszen az összeg minden tagja osztható 101-gyel a számlálóban. ↑

2. Igazoljuk, hogy 10 bármely egész kitevőjű hatványa felírható két négyzettség összegeként.

A 10 és a 100 felírható, hiszen $10 = 1^2 + 3^2$, $100 = 6^2 + 8^2$. A 100 négyzettség, ezért 100-zal megszorozva két négyzettség összegét, szintén két négyzettség összegét kapjuk. Például $1000 = (10 \cdot 1)^2 + (10 \cdot 3)^2$. Hasonlóan felírható az összes hatvány.

$$10^{2n+1} = (10^n \cdot 1)^2 + (10^n \cdot 3)^2 = 10^{2n} \cdot (1^2 + 3^2);$$

$$10^{2n} = (10^{n-1} \cdot 6)^2 + (10^{n-1} \cdot 8)^2 = 10^{2n-2} \cdot (6^2 + 8^2)$$
↑

3. Egy folyó partján az A és B város 20 km-re van egymástól. Egy csónak A-ból B-be és vissza 10 óra alatt tette meg az utat. Felfelé 2 km-t tett meg ugyanannyi idő alatt, mint lefelé 3 km-t. Mekkora a folyó sebessége?

Jelölje x a folyó, y a csónak sebességét km/h-ban. Ekkor felfelé $\frac{20}{y-x}$ óra megtenni az utat, lefelé $\frac{20}{y+x}$. Tehát

$$10 = \frac{20}{y-x} + \frac{20}{y+x}$$

Felfelé 2 km-t $\frac{2}{y-x}$ óra alatt tesz meg, tehát

$$\frac{2}{y-x} = \frac{3}{y+x}$$

Innen $y-x = \frac{2}{3}(y+x)$. Az első egyenletbe behelyettesítve :

$$10 = \frac{20}{y+x} + \frac{30}{y+x} = \frac{50}{y+x}$$

$$y+x = 5$$

$$y-x = \frac{10}{3}$$

Innen $y = \frac{25}{6}$, $x = \frac{5}{6}$. Tehát a folyó sebessége $\frac{5}{6}$ km/h. ↑

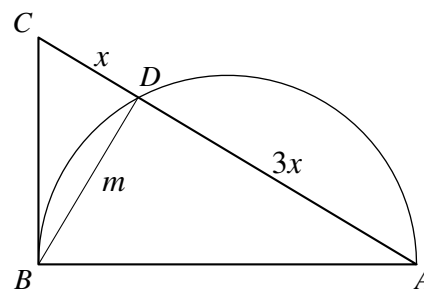
4. Egy derékszögű háromszögről tudjuk, hogy az egyik befogóra mint átmérőre rajzolt kör az átfogót 1 : 3 arányban osztja fel. Mekkora a háromszög hegyesszögei?

D jelölje az átfogó és a körív A-tól különböző metszéspontját. Thalész tétele miatt $\angle CDA = 90^\circ$, azaz CD az átfogóhoz tartozó magasság, hosszát jelölje m . BD hossza legyen x , ekkor $DA = 3x$. A BDC és CDA háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlőek. Tehát a megfelelő oldalak aránya megegyezik, azaz

$$\frac{x}{m} = \frac{m}{3x}$$

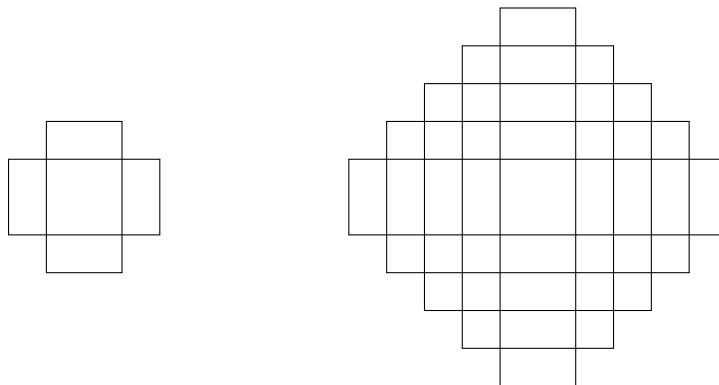
Innen $m = \sqrt{3}x$. (Ezt mondja ki általános formában a magasságtétel.) Az ACD derékszögű háromszög két befogójának aránya $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tehát $\angle CAD = 30^\circ$.

A háromszög hegyesszögei tehát 60° , illetve 30° . ↑



5. Egy négyzetrácsos lapon megrajzolunk n olyan téglalapot ($n \geq 1$ egész), amelynek oldalai a rácsvonalakkal párhuzamosak. Legfeljebb hány részre osztják ezek a téglalapok a síkot?

Egy téglalap két részre osztja a síkot, kettő legfeljebb hat részre.



Egy téglalap egy másik téglalap oldalait legfeljebb 4 pontban metszheti, ha nincs közös oldaluk. Az n . téglalap kerületén így legfeljebb $4(n-1)$ db osztópont keletkezhet. Az osztópontok $4(n-1)$ részre bontják a kerületét. A kerület minden darabja kettéoszt egy korábban összefüggő síkrészt, azaz $4(n-1)$ -gyel nő a részek száma. Egy síkrészt csak egy kerületdarab tud kettéosztani, ezért kevesebb metszéspont, vagy oldalak egybeesése esetén a részek száma csak kevesebb lehet. Az első téglalap két részre osztja a síkot, ezután minden további alkalmazhatjuk a fenti gondolatmenetet. Tehát n téglalap legfeljebb

$$2 + 4(1 + 2 + \dots + n - 1) = 2 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 2n^2 - 2n + 2$$

részre oszthatja a síkot.



Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 1$ egész szám, akkor az

$$n + 1, 2n + 1, 3n + 1, 4n + 1, \dots$$

sorozatban mindig van négyzetszám, és mindig van köbszám is.

A sorozat $n + 2$. tagja mindig négyzetszám, $n^2 + 3n + 3$. tagja mindig köbszám.

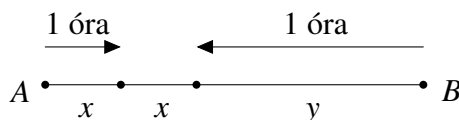
$$(n + 2)n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

$$(n^2 + 3n + 3)n + 1 = n^2 + 3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3$$



2. A-ból B-be indult egy gyalogos, vele egy időben B-ből A-ba ugyanazon az úton elindult egy kerékpáros. Egy óra múlva a gyalogos pontosan a félúton volt A és a kerékpáros között. Újabb 15 perc múlva a gyalogos és a kerékpáros találkozott, majd a gyalogos folytatta útját B-be. Mennyi ideig tartott a gyalogos útja A-ból B-be?

Készítsünk ábrát!



Jelölje x a gyalogos által egy óra alatt megtett távolságot, y a biciklis által megtettét. Ekkor A és B távolsága $2x + y$.

15 perc az $\frac{1}{4}$ óra, ez alatt a gyalogos $\frac{1}{4}x$, a biciklis $\frac{1}{4}y$ távolságot tesz meg. Találkoznak, tehát negyed óra alatt ketten együtt éppen a köztük lévő x távolságot tették meg. Tehát

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{4}(x + y) \\ 3x &= y\end{aligned}$$

Tehát A és B távolsága $5x$, ezt a gyalogos 5 óra alatt tette meg.



3. Az $ABCD$ négyzet belsejében adjuk meg azokat a P pontokat, amelyekre

$$AP + CP = BP + DP$$

teljesül.

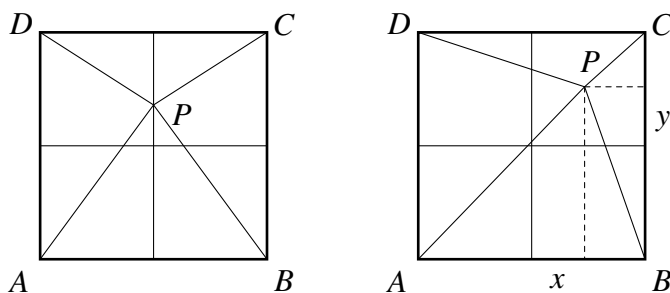
Ha P valamelyik középvonalon helyezkedik el, akkor jó.

Ugyanis ha a P pont a DC oldal felezőmerőlegesén van, a DPC és ABP háromszögek egyenlőszárúak, ezért teljesül az egyenlőség.

Ha a P a BC oldal felezőmerőlegesén van, a BPC és APD háromszögek egyenlőszárúak, ezért teljesül az egyenlőség.

Be kell még látni, hogy más pont nem lehet jó.

Legyen P távolsága a középvonalaktól x és y , feltesszük, hogy $x \neq 0 \neq y$.



Szimmetria okok miatt elég megvizsgálni a négyzet egy negyedét. Tegyük fel, hogy $AP + CP = BP + DP$, ekkor a Pitagorasz-tétel alapján

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y\right)^2} = \\&= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y\right)^2}\end{aligned}$$

Kétszer egymás után négyzetre emelve, rendezve és leosztva 4-gyel, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{2} - x \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + x \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y \right)^2 \right] = \\ & = \left[\left(\frac{1}{2} - x \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + x \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Kivonva a mindkét oldalon szereplő tagokat:

$$-2xy = 2xy$$

Ez azonban nem teljesülhet, mert feltettük, hogy $x \neq 0 \neq y$.
Tehát pontosan a középvonalak pontjaira igaz az egyenlőség.



4. Igazoljuk, hogy bárhogyan is adunk meg 51 darab, 100-nál nem nagyobb pozitív egész számot, mindig ki lehet választani közülük kettőt úgy, hogy a kiválasztottak hányadosa 2-nek pozitív egész hatványa.

Minden pozitív egész $n = s \cdot 2^k$ alakba írható, ahol k nemnegatív egész, s pedig egyértelműen meghatározott páratlan szám. 1 és 100 között 50 darab páratlan szám van. 51 szám esetén a skatulya-elv alapján lesz 2, amelynek felbontásában ugyanaz a páratlan szám szerepel. Ezek hányadosa 2-nek pozitív egész hatványa lesz, mert a két szám nem lehet egyenlő.



XL. VERSENY 2010–11.

FELADATOK

Megyei forduló

1. Négy szám összege 109. Ha a második számot felére csökkentjük, a harmadikból 10-et elveszünk, a negyediket 6-tal növeljük, akkor az első számmal egyenlő számokat kapunk. Melyik ez a négy szám? 
2. Négy különböző színű szabályos dobókockánk van. Hányféleképpen lehet ezekkel összesen 20-at dobni? 
3. Egy raktárban van 21 azonos méretű hordó. Ezek közül 7 tele van, 7 félig van egy vegyszerrel, 7 pedig üres. Az összes hordót el kell szállítani 3 teherautóval. Átönteni a vegyszert nem lehet. Hogyan kell rakodni, hogy mindhárom teherautóra azonos tömegű rakomány kerüljön? 
4. Az 1, 2, 3, 4, 6 és 12 számok közé tegyünk + vagy – jeleket úgy, hogy az összeg 0 legyen. 

Megyei forduló

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege 2011? 
2. Adott az ABC szabályos háromszög. Ebbe beleírunk egy PQR szabályos háromszöget (P az AB , Q a BC , R a CA oldalon van) úgy, hogy PQ merőleges AB -re, RQ merőleges BC -re és PR merőleges AC -re. Milyen arányban osztják a P , Q , R pontok a megfelelő oldalakat? 
3. Van 72 darab egyforma (egybevágó) kis kockánk. Ezekből téglatestet kell építeni úgy, hogy mindet felhasználjuk. Hányféle különböző téglatest építhető a 72 kis kockából? 
4. Az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ számok közé tegyünk + vagy – jeleket úgy, hogy a kapott összeg 0 legyen. 

Megyei forduló

1. Egy tízes számrendszerben felírt háromjegyű szám elé írunk egy számjegyet, így az eredeti szám 9-szeresét kapjuk. Melyik lehetett a kapott négyjegyű szám? 
2. Adott egy $ABCD$ konvex négyszög. A P , a Q , az R és az S pontok legyenek sorra az AB , BC , CD , DA oldalak felezőpontjai. Hányadrésze a $PQRS$ négyszög területe az $ABCD$ négyszög területének? 
3. Számítsuk ki a következő szorzat értékét, ha $n > 0$ egész szám:

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$$



4. Az ABC háromszögben $\angle BAC = 40^\circ$. A háromszög belsejében felvesszünk egy P pontot úgy, hogy a $\angle BPC = 110^\circ$. A BP szakasz felezőmerőlegese Q -ban metszi AB -t, a PC szakasz felezőmerőlegese R -ben metszi AC -t. Igazoljuk, hogy Q , P és R egy egyenesre illeszkedik. 
5. Adjunk meg a tízes számrendszerben olyan tízjegyű számot, amelynek első jegye a számban a 0-s számjegyek számát, második jegye az 1-es számjegyek számát és így tovább, tizedik jegye a számban a 9-es számjegyek számát jelöli. 

Megyei forduló

1. Melyek azok az $n > 0$ egész számok, amelyekre $n^4 + n^2 + 1$ prímszám? 
2. Az A és B város távolsága közúton 540 km. A -ból reggel 8 órakor indul egy autó B -be, B -ből 10 órakor indul ugyanezen a napon, ugyanezen az úton egy másik autó A -ba. A később induló autó sebessége 20 km/órával nagyobb az előbb indulóénál. 13 órakor találkoznak. Számítsuk ki az autók sebességét, és azt, hogy mekkora utat tettek meg a találkozásig. 
3. Az $ABCD$ paralelogramma AB , illetve BC oldalára kifelé megszerkesztjük az ABP , illetve BCQ szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy PQD is szabályos háromszög. 
4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n > 0$ egész számhoz van olyan tízes számrendszerbeli $11 \dots 10 \dots 0$ alakú szám, amely osztható n -nel. 
5. Legyen $k > 0$ egész szám. Igazoljuk, hogy a

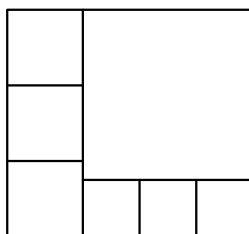
$$k, k+1, k+2, \dots, 2k$$

számok között van négyzetszám.



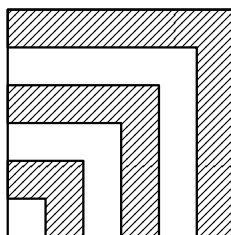
Országos döntő

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 2-vel, 3-mal, 5-tel és 67-tel osztva mindig 1 maradékot ad? ➡
2. Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Ahhoz, hogy a találmra kihúzott golyók között biztosan legyen piros, legkevesebb 5 golyót kell kihúzni. Ahhoz, hogy a biztosan legyen köztük kék, legkevesebb 6 golyót kell kivenni. Hány piros és hány kék golyó van a dobozban? ➡
3. Van 12 db számkártyánk, 4 db 5-ös, 4 db 3-as, 4 db 2-es. Állíts ezekből össze 4 különböző háromjegyű számot úgy, hogy ezek összege a lehető legnagyobb legyen. ➡
4. Egy téglalapot az ábrán látható módon osztottunk fel különböző méretű négyzetekre. (3-3 egybevágó, egyforma ezek közül.) A középső méretű négyzet oldalhossza 4 egység. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.



Országos döntő

1. Egy turista minden nap elköltötte még meglévő pénze felét, és még 500 Ft-ot. Így a pénze a negyedik napon elfogyott. Mennyi pénze volt, amikor megérkezett? ➡
2. Az ábrán látható négyzetben a fehér és a sátrózott sávok szélessége azonos. A négyzet területének hányadrésze fehér?



3. Határozzuk meg az

$$X = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2009 + 2011$$

számnak a 2010-zel való osztási maradékát.



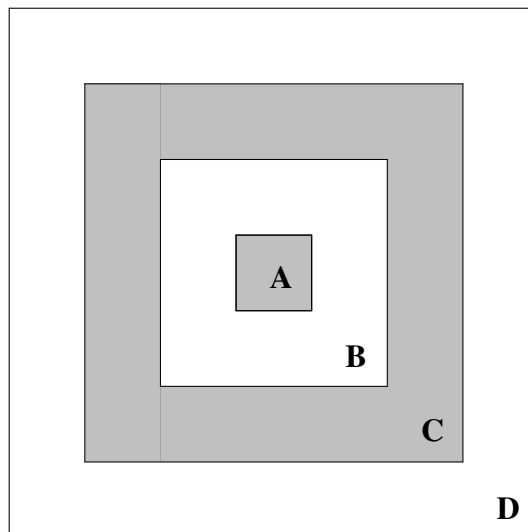
4. Az 1-nél nem kisebb és 1000-nél nem nagyobb egész számok között hány olyan van, amely páros, de a tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege páratlan? ➡

Országos döntő

1. Egy háromjegyű, tízes számrendszerben felírt szám a számjegyei összegének 15-szöröse. Melyik ez a szám? ➡
2. Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{12}{39}, \frac{1212}{3939}, \frac{121212}{393939}, \dots$$

3. Hány olyan négyjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely legfeljebb 2 különböző számjegyet tartalmaz? ➡
4. Az ábrán egy céltábla látható. Célba lövéskor a pontszámok fordítottan arányosak az eltalált táblarész területével. Tudjuk, hogy a **B** rész 6 pontot ér. Mennyit ér az **A**, a **C** és a **D** területrész? ➡



Országos döntő

1. Egy háromjegyű és egy kétjegyű tízes számrendszerben felírt szám összege 168. Ha mindkét számban megfordítjuk a számjegyek sorrendjét, akkor az így kapott számok összege 375. Melyik ez a két szám? ➡
2. Egy családban az apa életkora 5 évvel kevesebb, mint az anya és a fiú életkorának összege. Hét év múlva, amikor az anya háromszor olyan idős lesz, mint a fiú, hármuk életkorának összege 108 év lesz. Hány évesek most a családtagok? ➡
3. Egy dobozban 500-nál kevesebb golyó van. Ha a golyókat négyesével, ötösével vagy hetesével csoportosítjuk, mindig 3 golyó marad ki. Ha kilencesével csoportosítjuk a golyókat, akkor nem marad ki egy sem. Hány golyó van a dobozban? ➡
4. Rajzolj olyan konvex négyszöget, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai, és fel lehet bontani négy egybevágó (egyforma) háromszögre. ➡

Országos döntő

1. Tudjuk, hogy $p, p+4, p+14$ prímszámok. Mi lehet p értéke?



2. Igazoljuk, hogy a

$$\frac{7^{13} - 13^7 + 2010^{11}}{7^{13} + 13^7 + 2011^{10}}$$

tört egyszerűsíthető.



3. Az A városból a B városba vezető út emelkedőkből és lejtőkből áll. Egy kerékpáros A -ból B -be 3 óra alatt ért, visszafele ugyanezen az úton B -ből A -ba 20 perccel tovább tartott az útja. Emelkedőn 20 km/óra, lejtőn 30 km/óra volt a sebessége. Hány kilométer az A és B város közötti távolság?



4. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Az A pontban merőlegest állítunk AC -re, és erre rámérjük az $AC = AP$ szakaszt. Ugyancsak merőlegest állítunk az A -ban AB -re, erre rámérjük az $AB = AQ$ szakaszt (a P és B az AC egyenes, a C és Q az AB egyenes különböző oldalán vannak). Igazoljuk, hogy $PB = QC$, és PB merőleges QC -re.



5. A következő végtelen számháromszögben a pozitív egész számok találhatók.

(a) Melyik szám áll a 2011. sor végén?

(b) Hányadik sor hányadik helyén áll a 2011?

			1		
		2		3	
	4		5		6
7		8		9	10
...	...	...	...	...	...



Országos döntő

1. Melyik az a tízes számrendszerbeli háromjegyű szám, amelynek 7-szerese egy pozitív egész szám harmadik hatványa (köbe)?



2. Jelölje H az első 111 pozitív egész számot tartalmazó halmazt. Egy lépésben a H két elemét elhagyjuk, és helyettük beírjuk H -ba a két elem különbségét (a nagyobbból vonjuk ki mindig a kisebbet, ha egyenlők, akkor természetesen 0-t írunk be). A 110. lépés után megmaradó egyetlen H -beli elem páros vagy páratlan?



3. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15° , akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak.



4. Valaki leírt 503 egymást követő pozitív egész számot a tízes számrendszerben, így összesen 2011 számjegyet írt le. Melyik volt az első és melyik az utolsó leírt szám?



Országos döntő

1. Adjunk meg olyan p prímszámot, hogy $p^2 - 6$ és $p^2 + 6$ is prímszám legyen. 
2. Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszögben a két befogó hosszának összege a háromszögbe és a háromszög köré írt kör átmérőjének összegével egyenlő. 
3. Az A -ból B -be vezető út 11,5 km hosszú. Először emelkedőn vezet, ezután vízszintes szakasz jön, majd lejtő következik. A -ból B -be egy gyalogos 2 óra 54 perc alatt tette meg az utat, visszafelé B -ből A -ba ugyanez az út 3 óra 6 percig tartott. Emelkedőn 3 km/óra, vízszintes terepen 4 km/óra, lejtőn 5 km/óra sebességgel ment. Milyen hosszú volt a vízszintes rész az A -ból B -be vezető úton? 
4. Egy háromszög oldalainak hossza 5, 12, 13 egység. Hány olyan pont van a háromszög belsejében, amelynek az oldalaktól mért távolsága egész szám? 
5. A 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 számjegyekből állítsunk össze 5 db kétjegyű tízes számrendszerbeli számot úgy, hogy az 5 szám szorzata a lehető legnagyobb legyen. 

Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy ha p prímszám, és $5p^2 - 2$ is prímszám, akkor $5p^2 - 4$ és $5p^2 + 2$ is prímszámok! 
2. Az $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldala AB és CD . Igazoljuk, hogy
$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot CD.$$
 
3. Egy kör kerületére felírtak 13 pozitív egész számot. Tudjuk, hogy bármely 4 szomszédos szám összege legfeljebb 21, és bármely 5 szomszédos szám összege legalább 26. Számítsuk ki a 13 szám összegét! 
4. A következő végtelen számháromszögben a páratlan pozitív egész számok találhatók.
 - (a) Melyik szám áll az n . sor végén?
 - (b) Mennyi az n . sorban álló számok összege?
 - (c) Mennyi az első n sorban álló számok összege?

			1		
		3		5	
	7		9		11
13		15		17	19
...	...	...	...	...	...



MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

1. Négy szám összege 109. Ha a második számot felére csökkentjük, a harmadikból 10-et elveszünk, a negyediket 6-tal növeljük, akkor az első számmal egyenlő számokat kapunk. Melyik ez a négy szám?

A feladat szövege szerint $a + b + c + d = 109$ és $a = \frac{b}{2} = c - 10 = d + 6$. Azaz $b = 2a$, $c = a + 10$, $d = a - 6$. Ezeket az első egyenletbe írva $a + b + c + d = a + 2a + (a + 10) + (a - 6) = 109$, innen $a = 21$ adódik. A négy szám tehát 21, 42, 31, 15. 

2. Négy különböző színű szabályos dobókockánk van. Hányféleképpen lehet ezekkel összesen 20-at dobni?

35-féleképpen. Ha nem dobunk 6-ost, akkor minden kockával 5-öst kell dobnunk, ez 1 eset. Ha egy 6-ost dobunk, akkor a maradék három kockán 5, 5, 4 kell, hogy legyen. Ez 12 eset, mert a 6-os kocka színe négyféle lehet, és ha ezt rögzítjük, akkor a 4-es kocka színe 3-féle lehet. Ha két 6-ost dobunk, akkor a maradék két kocka vagy 5, 3 (ez 12 eset mint az előbb) vagy 4, 4 lehet (ez 6 eset, mert a négy színből kettőt hatféleképpen lehet kiválasztani). Ha három 6-ost dobunk, akkor az utolsó kockán 2 kell, hogy legyen. Ez 4 eset, hiszen a 2-es kocka színe négyféle lehet. Ha négy 6-ost dobnánk az összeg már túl sok lenne. 

3. Egy raktárban van 21 azonos méretű hordó. Ezek közül 7 tele van, 7 félig van egy vegyszerrel, 7 pedig üres. Az összes hordót el kell szállítani 3 teherautóval. Átönteni a vegyszert nem lehet. Hogyan kell rakodni, hogy mindhárom teherautóra azonos tömegű rakomány kerüljön?

Mivel a hordók súlyát nem ismerjük, minden teherautóra hét hordót továbbá három és fél hordónyi vegyszert kell tenni (hiszen összesen $7 + 7 \cdot \frac{1}{2} = 10,5$ hordónyi vegyszer van, így egy autóra a harmada, azaz 3,5 hordónyi kell, hogy kerüljön). Azaz, minden teherautóra kell egy félig tele hordót tenni. A maradék 4 félig tele hordónál választhatunk. Vagy egy teherautóra kerül mind, vagy két teherautóra is kerül két félig tele hordó. Innét a maradék hordók felrakása egyértelmű, és a következő két megoldás adódik:

első autó: $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1$, második: $\frac{1}{2} 1 1 1$, harmadik: $\frac{1}{2} 1 1 1$;

első autó: $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 1$, második: $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 1$, harmadik: $\frac{1}{2} 1 1 1$.

Megjegyzés. A versenyen elég volt egy megoldás megtalálása. 

4. Az 1, 2, 3, 4, 6 és 12 számok közé tegyünk + vagy – jeleket úgy, hogy az összeg 0 legyen.

A 12 és a 3 nem lehet azonos előjelű, mert $12 + 3 > 1 + 2 + 4 + 6$. Hasonlóan a 12 és a 3, 4, 6 is különböző előjelű. Ebből némi próbálkozással adódik, hogy:

$$1 - 2 + 3 + 4 + 6 - 12 = 0.$$


Megyei forduló

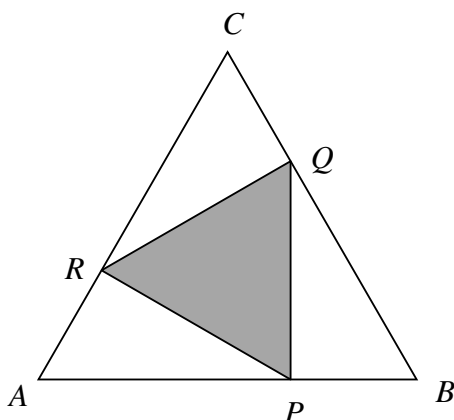
1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege 2011?

Ha két szám közül az egyiknek kevesebb számjegye van, akkor biztosan kisebb, mint a másik. Ebből következően elsősorban az a célunk, hogy a számnak minél kevesebb jegye legyen. A szám legalább 224-jegyű, ugyanis $223 \cdot 9 = 2007 < 2011$, így ha minden jegye 9-es lenne, akkor sem lehetne a jegyek összege 2011. Ha már tudjuk, hogy hány jegyű a szám, akkor annál kisebb lesz, minél kisebb az első számjegye. Az első számjegy legalább 4, hiszen az előbb láttuk, hogy 223 darab 9-es számjegy a jegyösszegben 2007-et ad, vagyis a maradék jegynek legalább 4-nek kell lennie. Az első számjegy minden esetben nagyobb lenne ennél, ha a szám 224-jegyű, ezért a legkisebb lehetséges szám a

$$\underbrace{4999 \dots 9999}_{223 \text{ darab}}$$



2. Adott az ABC szabályos háromszög. Ebbe beleírunk egy PQR szabályos háromszöget (P az AB , Q a BC , R a CA oldalon van) úgy, hogy PQ merőleges AB -re, RQ merőleges BC -re és PR merőleges AC -re. Milyen arányban osztják a P , Q , R pontok a megfelelő oldalakat?



Mivel $PQ \perp AB$, és a B -nél lévő szög 60° , ezért a $PQB\triangle$ egy szabályos háromszög fele, mégpedig úgy, hogy

$$QB = 2 \cdot PB$$

Hasonlóan kapjuk

$$RC = 2 \cdot QC$$

$$PA = 2 \cdot RA$$

Ezekből együttesen pedig következik, hogy a P, Q, R pontok $1 : 2$ arányban osztják a megfelelő oldalakat.

3. Van 72 darab egyforma (egybevágó) kis kockánk. Ezekből téglatestet kell építeni úgy, hogy mindet felhasználjuk. Hányféle különböző téglatest építhető a 72 kis kockából?

Ha a téglatest oldalai a, b és c , akkor nyilván $abc = 72$. Ezen kívül még azt is tudjuk, hogy a, b és c egész számok. Szisztematikusan soroljuk fel a lehetőségeket az oldalak növekvő sorrendjében. (Ha ugyanaz a számhármass szerepel más sorrendben, akkor az ugyanazt a téglatestet jelenti, vagyis az nem új megoldás.) A lehetőségek:

$1 \cdot 1 \cdot 72$	$2 \cdot 2 \cdot 18$	$3 \cdot 3 \cdot 8$
$1 \cdot 2 \cdot 36$	$2 \cdot 3 \cdot 12$	$3 \cdot 4 \cdot 6$
$1 \cdot 3 \cdot 24$	$2 \cdot 4 \cdot 9$	
$1 \cdot 4 \cdot 18$	$2 \cdot 6 \cdot 6$	
$1 \cdot 6 \cdot 12$		
$1 \cdot 8 \cdot 9$		

Összesen tehát 12 különböző téglatest készíthető.

4. Az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ számok közé tegyük + vagy – jeleket úgy, hogy a kapott összeg 0 legyen.

Kitartó próbálkozás után az alábbi eredményre juthatunk:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 0.$$

Egy másik megoldási lehetőség, hogy közös nevezőre hozunk (ami 12), és akkor az 1, 2, 3, 4, 6, 12 számokat, vagyis a kapott számlálókat kell két csoportra osztanunk úgy, hogy a két csoportban a számok összege megegyezzen. A számok összege 28, vagyis két 14-es csoportra kell bontani, így a 2 és a 12 kerül egy csoportba, ami épp a fenti eredményt vagy annak ellentettjét adja. 

Megyei forduló

1. Egy tízes számrendszerben felírt háromjegyű szám elé írunk egy számjegyet, így az eredeti szám 9-szeresét kapjuk. Melyik lehetett a kapott négyjegyű szám?

Legyen a háromjegyű szám A , a számjegy, amit elé írunk pedig n . Ekkor azt tudjuk, hogy

$$9A = 1000n + A, \text{ azaz}$$

$$8A = 1000n$$

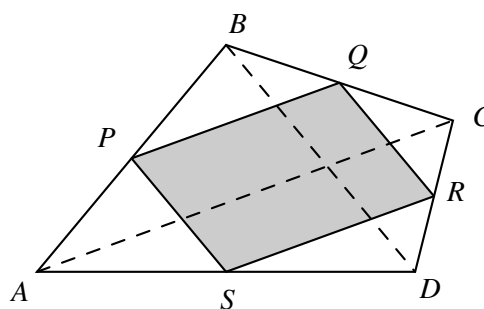
$$A = 125n.$$

Tehát A többszöröse 125-nek és háromjegyű, így lehetséges értékei: 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. Ezek mind adnak is jó megoldást, amik rendre: 1125, 2250, 3375, 4500, 5625, 6750, 7875. 

2. Adott egy $ABCD$ konvex négyszög. A P , a Q , az R és az S pontok legyenek sorra az AB , BC , CD , DA oldalak felezőpontjai. Hányadrésze a $PQRS$ négyszög területe az $ABCD$ négyszög területének?

Az $ABC\triangle$ -ben a PQ szakasz középvonal, ami azt jelenti, hogy $PQ \parallel AB$ és PQ hossza fele AB hosszának. Ez azt is jelenti, hogy az $ABC\triangle$ -ben az AB -hez tartozó magasság hossza kétszerese a $PQB\triangle$ -ben a PQ -hoz tartozó magasságnak, így az $ABC\triangle$ területe 4-szerese a $PQB\triangle$ -nek. Hasonlóan adódik, hogy az $ACD\triangle$ területe négyszerese az $SRD\triangle$ -nek. Ebből együttesen azt kapjuk, hogy a $PQB\triangle$ és $SRD\triangle$ területe együttesen negyede az $ABCD$ négyszög területének.

Ugyanezt a gondolatmenetet követve arra juthatunk, hogy az $ASP\triangle$ és $RQC\triangle$ együttes területe negyede az $ABCD$ négyszög területének. Így a 4 háromszög együttes területe fele a négyszög területének, vagyis ami megmarad, az is fele. De a háromszögek elhagyása után épp a $PQRS$ négyszög marad, amire így azt kaptuk, hogy fele az $ABCD$ négyszög területének. 



3. Számítsuk ki a következő szorzat értékét, ha $n > 0$ egész szám:

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$$

Ha a szorzat egy általános tényezőjét tekintjük, és közös nevezőre hozzuk, akkor a következőt kapjuk:

$$1 + \frac{1}{k(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{k(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Ezt az észrevételt felhasználva a keresett szorzat az alábbi módon írható fel:

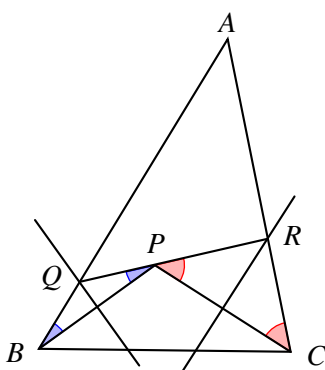
$$\frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Ha ezt megvizsgáljuk, akkor látható, hogy a számlálóban minden négyzetszám 3^2 -től n^2 -ig kiesik, hiszen a két szomszédos nevező tartalmazza a megfelelő tényezőt. A 2^2 és $(n+1)^2$ esetén csak egy szomszéd van, így egyszerűsítés után ezekből megmarad egy-egy tényező, vagyis a számláló $2(n+1)$ lesz. Így viszont a nevezőben is szinte minden eltűnik, kivéve a két szélső tényezőt. A bal szélső 1, ami nem számít ebben az esetben, a jobb szélső pedig $n+2$. Vagyis a tört értéke egyszerűbb alakban:

$$\frac{2(n+1)}{n+2}.$$



4. Az ABC háromszögben $BAC \sphericalangle = 40^\circ$. A háromszög belsejében felvesszünk egy P pontot úgy, hogy a $BPC \sphericalangle = 110^\circ$. A BP szakasz felezőmerőlegese Q -ban metszi AB -t, a PC szakasz felezőmerőlegese R -ben metszi AC -t. Igazoljuk, hogy Q , P és R egy egyenesre illeszkedik.



Mivel a Q pont rajta van a BP szakaszfelező merőlegesén, ezért a $BPQ \triangle$ egyenlőszárú. Ugyanez elmondható a $CPR \triangle$ -re is. Legyen a $BQP \triangle$ két alapon fekvő, egyenlő szöge α , illetve a $PRC \triangle$ két alapon fekvő, egyenlő szöge β . (Az ábrán ezeket a szögeket kékkel, illetve pirossal jelöltük.) Ekkor az $AQR \sphericalangle = 2\alpha$, hiszen a $BPQ \triangle$ külső szöge. Ugyanígy $ARP \sphericalangle = 2\beta$. Ekkor viszont tekintve az $AQR \triangle$ -et, azt kapjuk, hogy

$$2\alpha + 2\beta + 40^\circ = 180^\circ.$$

Amiből azt kapjuk, hogy $\alpha + \beta = 70^\circ$.

Ekkor viszont, felhasználva, hogy $BPC \sphericalangle = 110^\circ$ kapjuk, hogy

$$BPQ \sphericalangle + 110^\circ + CPR \sphericalangle = \alpha + 110^\circ + \beta = 180^\circ,$$

vagyis a Q , P és R pontok egy egyenesre esnek.



5. Adjunk meg a tízes számrendszerben olyan tízjegyű számot, amelynek első jegye a számban a 0-s számjegyek számát, második jegye az 1-es számjegyek számát és így tovább, tizedik jegye a számban a 9-es számjegyek számát jelöli.

Módszeres próbálgatást követően az alábbi eredményre juthatunk: 6210001000.



1. Melyek azok az $n > 0$ egész számok, amelyekre $n^4 + n^2 + 1$ prímszám?

$$n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 + n)(n^2 + 1 - n)$$

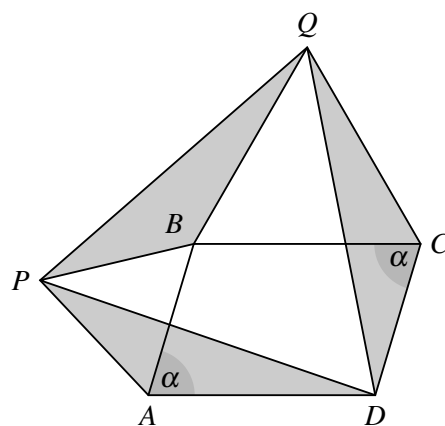
Tehát a kifejezést sikerült szorzattá alakítani. Mindkét tényező pozitív, ezért ha $n^4 + n^2 + 1$ prímszám, akkor az egyik tényező biztosan 1. Mivel $n \geq 1$, ezért $n^2 + 1 + n \geq 3$, tehát ez a tag nem lehet egyenlő 1-gyel. Ha $n^2 + 1 - n = 1$, akkor $n = 1$, vagy 0. Utóbbit a feladat feltételei kizárják. Ha $n = 1$, akkor $n^4 + n^2 + 1 = 3$ valóban prímszám. Egyéb esetekben a fentiek alapján $n^4 + n^2 + 1$ két 1-nél nagyobb szám szorzatára bomlik, ezért biztosan nem prímszám. Tehát az 1 az egyetlen pozitív egész, amelyre $n^4 + n^2 + 1$ prímszám. 

2. Az A és B város távolsága közúton 540 km. A-ból reggel 8 órakor indul egy autó B-be, B-ből 10 órakor indul ugyanezen a napon, ugyanezen az úton egy másik autó A-ba. A később induló autó sebessége 20 km/órával nagyobb az előbb indulóénál. 13 órakor találkoznak. Számítsuk ki az autók sebességét, és azt, hogy mekkora utat tettek meg a találkozásig.

Az A-ból induló autó sebességét jelölje v km/h-ban megadva. Ekkor a másik autó sebessége $v + 20$ km/h. A találkozásig együtt összesen 540 km-t tesznek meg, az első autó 5 óráig, a második 3 óráig megy. A megtett út a sebesség és az eltelt idő szorzata, tehát $540 \text{ km} = 5h \cdot v + 3h \cdot (v + 20 \text{ km/h})$. Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $v = 60 \text{ km/h}$. Tehát az első autó sebessége 60 km/h és 300 km-t tett meg a találkozásig, míg a második autó sebessége 80 km/h és 240 km-t tett meg a találkozásig. 

3. Az ABCD paralelogramma AB, illetve BC oldalára kifelé megszerkesztjük az ABP, illetve BCQ szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy PQD is szabályos háromszög.

Legyen $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$. Ekkor $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$. A paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak és a BCQ, illetve az ABP háromszögek szabályosak, ezért $AD = CB = CQ = BQ$ és $DC = AB = AP = PB$. $\angle DAP = \alpha + 60^\circ$, $\angle PBQ = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 60^\circ - 60^\circ = \alpha + 60^\circ$, és végül $\angle DCQ = \alpha + 60^\circ$. Tehát az ADP, BQP, és CQD háromszögek egybevágóak, mert két-két oldaluk és a közrezárt szög egyenlő. Így ezen háromszögek harmadik oldala is egyenlő hosszú, azaz $DP = QP = QD$, ami éppen azt jelenti, hogy a DPQ háromszög is szabályos háromszög. 



4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n > 0$ egész számhoz van olyan tízes számrendszerbeli $11 \dots 10 \dots 0$ alakú szám, amely osztható n -nel.

Vizsgáljuk az $11 \dots 1$ alakú számok n -nel való osztási maradékát. Képezzünk sorozatot az 1, 11, 111, ... számok osztási maradékaiból. A maradékok kisebbek n -nél, ezért skatulya-elv miatt a sorozat első $n + 1$ tagja között biztosan lesz két egyforma. Tehát $\underbrace{11 \dots 1}_{r \text{ db}}$ és $\underbrace{11 \dots 1}_{s \text{ db}}$ osztási maradéka megegyezik, így különbségük osztható n -nel. Két ilyen alakú szám különbsége éppen a kívánt alakú, ezzel igazoltuk az állítást. 

5. Legyen $k > 0$ egész szám. Igazoljuk, hogy a

$$k, k+1, k+2, \dots, 2k$$

számok között van négyzetszám.

Ha egy szomszédos egész számokból álló sorozat nem tartalmaz négyzetszámot, akkor a sorozat tagjai biztosan két szomszédos négyzetszám közé esnek. Tudjuk, hogy m^2 és $(m+1)^2$ különbsége $2m+1$. $k \leq 4$ esetén az állítás nyilván igaz. Ha a sorozat nem tartalmaz négyzetszámot, valamely m pozitív egész számra $2m+1 > k+1$ szükséges, hogy teljesüljön. Ekkor átrendezve és négyzetre-emelve kapjuk, hogy

$$m^2 > \frac{k^2}{4} > k$$

teljesül $k > 4$ esetén. Tehát a kisebbik négyzetszámnak nagyobbnak kellene lennie k -nál, de így nem eshet a sorozat összes tagja e két négyzetszám közé. Tehát nem fordulhat elő, hogy nem tartalmaz négyzetszámot, azaz minden esetben tartalmaz négyzetszámot a sorozat. 

Országos döntő

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 2-vel, 3-mal, 5-tel és 67-tel osztva mindig 1 maradékot ad?

Az 1 a legkisebb ilyen szám.

Megjegyzés. A keresett számból vonjunk ki 1-et. Ez a szám osztható 2-vel, 3-mal, 5-tel és 67-tel is. Mivel ezeknek a számoknak nincsen közös osztójuk, a keresett szám osztható $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2010$ -zel. Azaz a „második legkisebb” ilyen szám a 2011. 

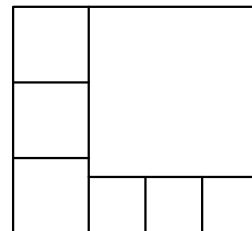
2. Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Ahhoz, hogy a találmra kihúzott golyók között biztosan legyen piros, legkevesebb 5 golyót kell kihúzni. Ahhoz, hogy biztosan legyen köztük kék, legkevesebb 6 golyót kell kivenni. Hány piros és hány kék golyó van a dobozban?

Öt golyó között van piros, így legfeljebb 4 kék lehet. Hat golyó között van kék, így legfeljebb 5 piros lehet. Kevesebb golyó kihúzásánál ez nem garantált, tehát a dobozban 4 kék és 5 piros golyó van. 

3. Van 12 db számkártyánk, 4 db 5-ös, 4 db 3-as, 4 db 2-es. Állíts ezekből össze 4 különböző háromjegyű számot úgy, hogy ezek összege a lehető legnagyobb legyen.

Ha minden háromjegyű szám 5-össel kezdődik, akkor a 4 szám összege legalább $4 \cdot 522 = 2088$. Ha valamelyik szám nem 5-össel kezdődik, akkor ez legfeljebb 355, a másik három pedig legfeljebb 555, azaz összegük legfeljebb $3 \cdot 555 + 355 = 2020$. Mivel $2088 > 2020$, a négy háromjegyű szám összege akkor lehet a legnagyobb, ha mind 5-össel kezdődik. A négy szám különböző, ez csak egyféleképpen lehet: 533, 532, 523, 522. 

4. Egy téglalapot az ábrán látható módon osztottunk fel különböző méretű négyzetekre. (3–3 egybevágó, egyforma ezek közül.) A középső méretű négyzet oldalhossza 4 egység. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.



A 4 egység oldalhosszúságú négyzet alatt 3 kis négyzet van. Ezek oldalhossza $\frac{4}{3}$ kell, hogy legyen. Így a téglalap függőleges oldala $4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$. A téglalap bal oldalán 3 négyzet van egymás felett. Ezek oldalhossza $\frac{16}{9}$ kell, hogy legyen. Így a téglalap vízszintes oldala $4 + \frac{16}{9} = \frac{52}{9}$.



Országos döntő

1. Egy turista minden nap elköltötte még meglévő pénze felét, és még 500 Ft-ot. Így a pénze a negyedik napon elfogyott. Mennyi pénze volt, amikor megérkezett?

A turista a negyedik napot tehát 1000 Ft-tal kezdte, mivel $\frac{1000}{2} - 500 = 0$. Így a turista a harmadik napot 3000 Ft-tal kezdte, mivel $\frac{3000}{2} - 500 = 1000$. A turista a második napot 7000 Ft-tal kezdte, mivel $\frac{7000}{2} - 500 = 3000$. Végül a turista az első napját 15000 Ft-tal kezdte, mivel $\frac{15000}{2} - 500 = 7000$. A turista tehát 15000 Ft-tal érkezett meg.



2. Az ábrán látható négyzetben a fehér és a sátrózott sávok szélessége azonos. A négyzet területének hányadrésze fehér?

Hosszabbítsuk meg a vízszintes és a függőleges szakaszokat. (Klikkelj az ábrára! (Adobe Reader kell ehhez!)) Így a négyzetet 36 kis négyzetre vágjuk szét. Ezek közül $1 + 5 + 9 = 15$ lesz fehér. Tehát a négyzet területének $\frac{15}{36}$ -od része fehér.



3. Határozzuk meg az

$$X = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2009 + 2011$$

számnak a 2010-zel való osztási maradékát.

Mivel az $1, 2, 3, 4, \dots, 2009$ számok között szerepel a 10 és a 201 is, így $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2009$ osztható $10 \cdot 201 = 2010$ -zel. Tehát X 2010-zel való osztási maradéka 2011 osztási maradéka lesz, ami 1.



4. Az 1-nél nem kisebb és 1000-nél nem nagyobb egész számok között hány olyan van, amely páros, de a tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege páratlan?

Először oldjuk meg $0 \leq x \leq 999$ egész számokra. Ennek az az előnye, hogy minden ilyen számot leírhatunk egy pontosan háromjegyű számmal, ahol az első jegy is lehet 0. (Például 4 helyett 004-et írunk. Páros vagy páratlanság, illetve jegyösszeg szempontjából nem változik semmi.) Az egyesek helyén 0, 2, 4, 6, 8 lehet csak, mivel a szám páros kell, hogy legyen. Ez 5 lehetőség. A tízesek helyére a 10 számjegy bármelyike kerülhet. Ha az egyesek és tízesek helyére írt jegyek összege páratlan, akkor a százask helyére páros jegyet kell tenni (5 lehetőség), hogy a háromjegyű szám számjegyeinek összege páratlan legyen. Ha az utolsó két jegy összege páros,

akkor a százask helyére páratlan jegyet kell tenni (5 lehetőség). Tehát a $0 \leq x \leq 999$ egész számok között $5 \cdot 10 \cdot 5 = 250$ a feladat feltételeinek megfelelő szám van. Mivel 1000 páros szám, ráadásul jegyösszege páratlan, így 251 a feladat feltételeinek megfelelő szám van. 

Országos döntő

1. Egy háromjegyű, tízes számrendszerben felírt szám a számjegyei összegének 15-szöröse. Melyik ez a szám?

Legyen a háromjegyű szám $\overline{abc}$. A feltétel alapján tudjuk, hogy

$$100a + 10b + c = 15(a + b + c),$$

amiből következik, hogy

$$85a - 5b = 14c.$$

Mivel a bal oldal osztható 5-tel, ezért a jobb oldal is. Mivel c egy számjegy, ezért ez csak úgy lehetséges, ha $c = 0$ vagy $c = 5$. A $c = 0$ eset nem ad jó megoldást, mert ekkor $17a = b$ lenne, ami számjegyekről lévén szó, csak úgy teljesülhet, ha a és b is 0. A $c = 5$ esetben kapunk jó megoldást, hiszen ekkor $85a = 5b + 70$ és mivel a és b továbbra is számjegyek, ezért a csak 1 lehet. Ekkor $b = 3$, vagyis az egyetlen megoldás a 135. Ellenőrizve: $135 = 15 \cdot (1 + 3 + 5)$. 

2. Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{12}{39}, \frac{1212}{3939}, \frac{121212}{393939}, \dots$$

Mivel

$$\frac{1212 \dots 12}{3939 \dots 39} = \frac{4 \cdot 3030 \dots 303}{13 \cdot 3030 \dots 303} = \frac{4}{13},$$

ezért mindegyik tört értéke $\frac{4}{13}$. 

3. Hány olyan négyjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely legfeljebb 2 különböző számjegyet tartalmaz?

Olyan négyjegyű számból, ami csak egyféle számjegyet tartalmaz pontosan 9 darab van. Ezek a következők: 1111, 2222, 3333, ..., 9999.

Nézzük azokat a négyjegyű számokat, amikben két különböző számjegy van. Legyen ez a két számjegy b és c . Ha feltesszük, hogy b az első számjegy, akkor 7 különböző szám lehetséges:

$$\overline{bcbb}, \overline{bbcb}, \overline{bbbc}, \overline{bccb}, \overline{cbcb}, \overline{bbcc}, \overline{bccc}.$$

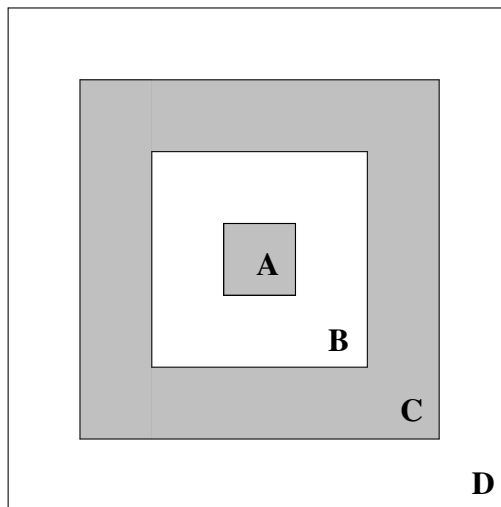
Nézzük, hányféle lehet b , illetve c értéke. Mivel egy szám nem kezdődhet 0-val, így b értéke 9-féle lehet. Ha rögzítettük b -t, akkor azt az értéket c már nem veheti fel, viszont lehet 0, így c értéke is 9-féle lehet. Ez összesen $9 \cdot 9 = 81$ lehetőség b és c értékének megválasztására. Minden esetben van 7 különböző szám, így ilyen számból $81 \cdot 7 = 567$ különböző van. Vagyis összesen $9 + 567 = 576$ szám felel meg a feltételeknek. 

4. Az ábrán egy céltábla látható. Célba lövéskor a pontszámok fordítottan arányosak az eltalált táblarész területével. Tudjuk, hogy a **B** rész 6 pontot ér. Mennyit ér az **A**, a **C** és a **D** területrész?

Ha az **A** rész területe 1 egység, akkor a **B** részé 8, a **C** részé 16, a **D** részé pedig 24. Ha a megfelelő részek pontszáma rendre a, b, c, d , akkor a fordított arányosság alapján azt kapjuk, hogy

$$24d = 16c = 8b = a.$$

De tudjuk, hogy $b = 6$, így kapjuk, hogy $a = 48$, $c = 3$ és $d = 2$.



Országos döntő

1. Egy háromjegyű és egy kétjegyű tízes számrendszerben felírt szám összege 168. Ha mindkét számban megfordítjuk a számjegyek sorrendjét, akkor az így kapott számok összege 375. Melyik ez a két szám?

Legyen a háromjegyű szám $\overline{abc}$, a kétjegyű pedig $\overline{de}$. Ekkor a feltételek azt adják, hogy

$$100a + 10b + c + 10d + e = 168$$

$$100c + 10b + a + 10e + d = 375$$

A második egyenletből kivonva az első a kapjuk, hogy

$$99(c - a) + 9(e - d) = 207,$$

$$11(c - a) + e - d = 23$$

Mivel a, c, d, e számjegyek, ezért $-9 \leq e - d \leq 9$, ezért az egyenlőség csak $c - a = 2$ esetén teljesülhet. Ebből következik, hogy $c = a + 2$ és $e - d = 1$, amiből következik, hogy $e = d + 1$. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve:

$$101a + 2 + 10b + 11d + 1 = 168$$

$$101a + 10b + 11d = 165.$$

Mivel a egy szám első számjegye, ezért $a \neq 0$. Viszont a értéke legfeljebb 1 lehet, hiszen ha legalább kettő lenne, akkor a bal oldal legalább 202 lenne. Ezért $a = 1$ és ebből következően $c = 3$. De akkor azt is tudjuk, hogy $10b + 11d = 64$, amit átalakítva kapjuk, hogy

$$10(b + d) + d = 64.$$

Mivel b és d számjegyek, ezért $d = 4$, $b + d = 6$, és ezekből következően $b = 2$. A keresett számok 123 és 45, amikre igaz is, hogy $123 + 45 = 168$ és $321 + 54 = 375$.

2. Egy családban az apa életkora 5 évvel kevesebb, mint az anya és a fiú életkorának összege. Hét év múlva, amikor az anya háromszor olyan idős lesz, mint a fiú, hármuk életkorának összege 108 év lesz. Hány évesek most a családtagok?

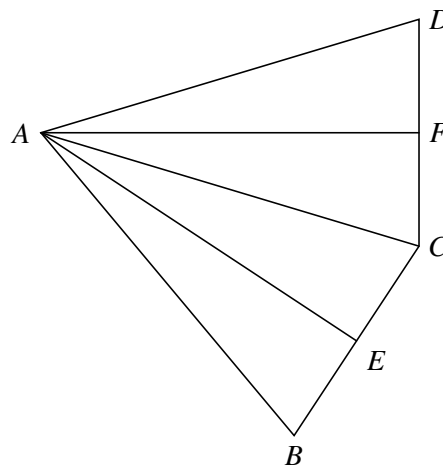
7 év múlva a 3 ember életkorának összege 21-gyel lesz több mint most, ezért most $108 - 21 = 87$ évesek összesen. Ha az apa életkora A , akkor az anya és a fiú életkorának összege $87 - A$. Vagyis $A + 5 = 87 - A$. Ebből kapjuk, hogy $A = 41$. Hét év múlva az apa 48 éves lesz, így az anya és a fiú összesen $108 - 48 = 60$ évesek. Ha a fiú életkora 7 év múlva F , akkor $3F + F = 60$, vagyis $F = 15$. Tehát hét év múlva a fiú 15 éves lesz, vagyis most 8. Az anya 7 év múlva 45 éves lesz, ezért most 38. Az apáról pedig már kiderült, hogy 41 éves. ↑

3. Egy dobozban 500-nál kevesebb golyó van. Ha a golyókat négyesével, ötösével vagy hetesével csoportosítjuk, mindig 3 golyó marad ki. Ha kilencesével csoportosítjuk a golyókat, akkor nem marad ki egy sem. Hány golyó van a dobozban?

Jelölje a dobozban lévő golyók számát N . Ekkor a feltételek azt jelentik, hogy N osztható 9-cel, illetve $N - 3$ osztható 4-gyel, 5-tel és 7-tel is. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $N - 3$ osztható $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$ -nel. Ezt felhasználva $N - 3$ értéke 0, 140, 280 és 420 lehet. (560 már nagyobb 500-nál.) N tehát lehet 3, 143, 283 és 423. Mivel ezek közül csak a 423 osztható 9-cel, ezért a dobozban 423 golyó van. ↑

4. Rajzolj olyan konvex négyszöget, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai, és fel lehet bontani négy egybevágó (egyforma) háromszögre.

Vegyünk két egybevágó egyenlőszárú háromszöget ($ABC\triangle$ és $ACD\triangle$), és mindkettőt bontsuk két egybevágó háromszögre az alaphoz tartozó magassággal (AE és AF). Így négy egybevágó háromszöget kapunk. Ha a két eredeti háromszöget egy-egy száruk mentén összeillesztjük (a közös szár az ábrán AC), akkor a feltételeknek megfelelő négyszöget kapunk. Ez a négyszög egy deltoid, aminek alkalmasan választva az oldalait, egyik sem lesz párhuzamos egy másikkal. ↑



Országos döntő

1. Tudjuk, hogy $p, p+4, p+14$ prímszámok. Mi lehet p értéke?

Nézzük a lehetséges p -ket 3-as maradékuk szerint.

- Ha p osztható 3-mal, akkor csak $p = 3$ jöhet szóba, hiszen p -nek is prímnek kell lennie. A $p = 3$ eset viszont jó, hiszen 3, 7 és 17 is prím.
- Ha $p = 3k + 1$, akkor $p + 14$ osztható 3-mal, és ez csak akkor lenne prím, ha $p + 14$ éppen 3 lenne. Ehhez $p = -11$ kellene. (Mivel $-11, -7$ és 3 prímelek, ezért ez is tekinthető jó megoldásnak, de ha a feladat külön nem említi, akkor általában pozitív számokra gondolunk ilyen esetekben.)

- Ha $p = 3k + 2$, akkor pedig $p + 4$ osztható 3-mal, és ez csak akkor lenne prím, ha $p + 4$ éppen 3 lenne. Ekkor viszont $p = -1$ lenne, ami nem prím.

Vagyis egyedül a $p = 3$ felel meg a feltételeknek. (Illetve a negatív számokat is prímnek tekintve a $p = -11$.)



2. Igazoljuk, hogy a

$$\frac{7^{13} - 13^7 + 2010^{11}}{7^{13} + 13^7 + 2011^{10}}$$

tört egyszerűsíthető.

Belátjuk, hogy mind a számláló, mind pedig a nevező osztható 5-tel. Ha ez igaz, akkor 5-tel tudunk egyszerűsíteni, ami igazolja az állítást.

7^n utolsó jegyei a következők: 7, 9, 3, 1, 7, ..., vagyis négyesével ismétlődnek. Ebből következően 7^{13} utolsó számjegye 7. Hasonlóan 13^n utolsó számjegyei is ismétlődnek: 3, 9, 7, 1, 3, ..., emiatt 13^7 utolsó számjegye szintén 7. Vagyis $7^{13} - 13^7$ utolsó jegye 0, és ehhez 2010^{11} -t hozzáadva szintén egy 10-zel osztható számot kapunk, hiszen ez a szám osztható 10-zel. Így a számláló nemcsak 5-tel, de ráadásul 10-zel is osztható. Felhasználva az eddigieket látható, hogy $7^{13} + 13^7$ utolsó számjegye 4 (hiszen a két összeadandó utolsó jegye 7 volt). Viszont 2011 minden hatványa, így a 10-edik is 1-re végződik, vagyis a nevező 5-re végződik. Ebből pedig következik, hogy osztható 5-tel.



3. Az A városból a B városba vezető út emelkedőkből és lejtőkből áll. Egy kerékpáros A-ból B-be 3 óra alatt ért, visszafele ugyanezen az úton B-ből A-ba 20 perccel tovább tartott az útja. Emelkedőn 20 km/óra, lejtőn 30 km/óra volt a sebessége. Hány kilométer az A és B város közötti távolság?

Ha emelkedőn halad, akkor 3 perc alatt tesz meg egy kilométert (hiszen 20 km/óra a sebessége), míg lejtőn 2 perc alatt (30 km/óra). Ebből következik, hogy minden kilométert oda-vissza összesen 5 perc alatt tesz meg. Odafele 180 perc volt az út, visszafelé $180 + 20 = 200$ perc, vagyis összesen 380. Ha minden A és B közötti kilométert oda-vissza 5 percet igényel, akkor $380 : 5 = 76$ km a két város távolsága.



4. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Az A pontban merőlegest állítunk AC-re, és erre rámérjük az $AC = AP$ szakaszt. Ugyancsak merőlegest állítunk az A-ban AB-re, erre rámérjük az $AB = AQ$ szakaszt (a P és B az AC egyenes, a C és Q az AB egyenes különböző oldalán vannak). Igazoljuk, hogy $PB = QC$, és PB merőleges QC-re.

Tekintsük az ábrán is megjelölt AQC és ABP háromszögeket. Mivel

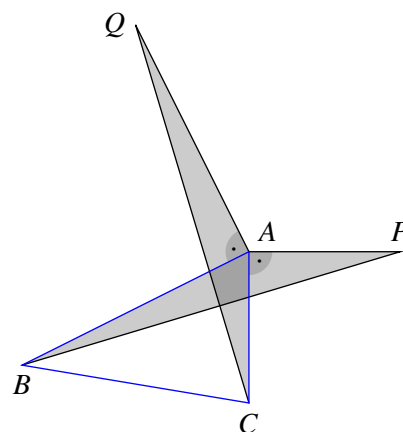
$$AP = AC \text{ és } \angle PAC = 90^\circ,$$

ezért AC-t 90° -kal elforgatva AP-t kapjuk. Hasonlóan

$$AB = AQ \text{ és } \angle BAQ = 90^\circ$$

miatt az AQ szakasz 90° -os elforgatottja AB. Ezekből következik, hogy az AQC háromszöget 90° -kal elforgatva éppen az ABP háromszöget kapjuk. Mivel egy 90° -os elforgatás után a megfelelő oldalak egyenlő hosszúságúak és merőlegesek egymásra, ezért kapjuk a bizonyítandó állítást, vagyis hogy

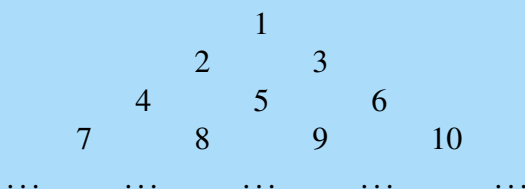
$$PB = QC \text{ és } PB \perp QC.$$



5. A következő végtelen számháromszögben a pozitív egész számok találhatók.

(a) Melyik szám áll a 2011. sor végén?

(b) Hányadik sor hányadik helyén áll a 2011?



(a) Mivel az első sorban egy, a másodikban kettő, a harmadikban három szám áll, és ez folytatódik tovább hasonlóan, így összesen $1 + 2 + 3 + \dots + 2011$ szám áll az első 2011 sorban. A sor utolsó eleme tehát éppen

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2011 = \frac{2011 \cdot 2012}{2} = 2023066.$$

(b) Az első 62 sorban az előző gondolatmenet alapján $\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$ szám áll. A következő sorban 63 elem van, így mivel

$$2011 - 1953 = 58,$$

ezért a 2011 a 63. sor 58. eleme.



Országos döntő

1. Melyik az a tízes számrendszerbeli háromjegyű szám, amelynek 7-szerese egy pozitív egész szám harmadik hatványa (köbe)?

Legyen a keresett háromjegyű szám A . Ekkor azt tudjuk, hogy $7A$ egy köbszám. Ha egy köbszám osztható 7-tel, akkor 7^3 -nel is, így $7^3 \mid 7A$. Ebből következik, hogy A osztható 49-cel. Legyen $A = 49b$, így b -nek köbszámnak kell lennie, hiszen $7A = 7^3b$ egy köbszám. Akkor b lehet rendre: $1, 8, 27, \dots$. Mivel $27 \cdot 49 = 1323$ már négyjegyű, így b legfeljebb 8 lehet. Az 1 nem felel meg a feltételeknek, vagyis $8 \cdot 49 = 392$ az egyetlen megoldás.



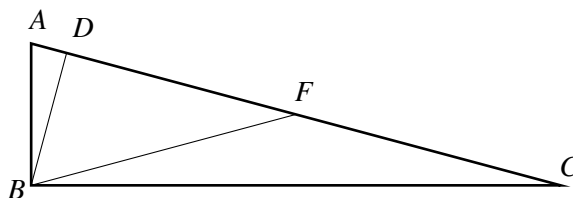
2. Jelölje H az első 111 pozitív egész számot tartalmazó halmazt. Egy lépésben a H két elemét elhagyjuk, és helyettük beírjuk H -ba a két elem különbségét (a nagyobból vonjuk ki mindig a kisebbet, ha egyenlők, akkor természetesen 0-t írunk be). A 110. lépés után megmaradó egyetlen H -beli elem páros vagy páratlan?

Azt érdemes észrevenni, hogy a halmazban lévő számok összegének paritása a folyamat során nem változik. Ez azért van így, mert ha a két kiválasztott szám azonos paritású, akkor az összegük és a különbségük is páros, vagyis a teljes összegben $a + b$ -t a vele azonos paritású $|a - b|$ -kel helyettesítettük. Ugyanez a helyzet akkor is, ha a és b paritása különböző, hiszen ilyenkor az összegük és a különbségük is páratlan. Induláskor az elemek összege:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 111 = \frac{111 \cdot 112}{2} = 56 \cdot 111.$$

Ez a szám páros és ez nem változik a folyamat során, vagyis végig páros marad. Így az utolsó szám biztosan páros, hiszen akkor az összeg abból az egyetlen számból áll. 

3. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15° , akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak.



Legyen az ábrán látható módon ABC a derékszögű háromszög, aminek B -nél van a derékszögű csúcsa. A C -nél lévő szög 15° . Legyen F az AC átfogó felezőpontja, D pedig a B -hez tartozó magasság talppontja (vagyis $BDC \angle = 90^\circ$). Derékszögű háromszög körülírt körének középpontja éppen az átfogó felezőpontja (Thalész-tétel), ezért $CF = BF$. Vagyis $BFC \triangle$ egyenlőszárú, így $FBC \angle = 15^\circ$. A háromszög külső szöge megegyezik a két nem mellette fekvő belső szög összegével, így $AFB \angle = 30^\circ$. Így viszont azt kapjuk, hogy a $BDF \triangle$ egy szabályos háromszög fele, vagyis $2 \cdot DB = BF$. Mivel $BF = CF$ és CF épp az átfogó fele, ezért a BD magasság épp negyede az átfogónak, és ezt kellett bizonyítani. 

4. Valaki leírt 503 egymást követő pozitív egész számot a tízes számrendszerben, így összesen 2011 számjegyet írt le. Melyik volt az első és melyik az utolsó leírt szám?

Vegyük észre, hogy $4 \cdot 503 = 2012$. Vagyis ha az összes szám négyjegyű lenne, akkor a kelleténél eggyel több számjegyük lenne. Ebből következik, hogy az első számnak háromjegyűnek kell lennie, a többinek pedig négyjegyűnek. Így az első szám a 999. Ezt követően még 502 számot kell leírnunk, így az utolsó szám 1501. 

Országos döntő

1. Adjunk meg olyan p prímszámot, hogy $p^2 - 6$ és $p^2 + 6$ is prímszám legyen.

Vizsgáljuk a számokat 5-tel való osztási maradék szerint. Ha $p = 5$, akkor $p^2 - 6 = 19$ és $p^2 + 6 = 31$ is prímszám. A többi prímszám ± 1 , vagy ± 2 maradékot adhat 5-tel osztva. Ha $p = 5k \pm 1$ valamilyen k egész számra, akkor

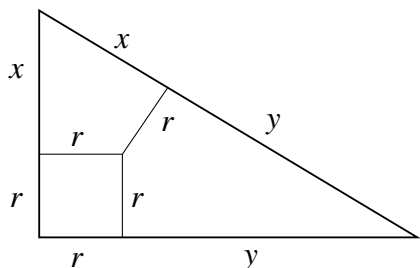
$$p^2 - 6 = (5k \pm 1)^2 - 6 = 5 \cdot (5k^2 \pm 2k) + 1 - 6 = 5 \cdot (5k^2 \pm 2k - 1).$$

Ha $p = 5k \pm 2$, akkor

$$p^2 + 6 = (5k \pm 2)^2 + 6 = 5 \cdot (5k^2 \pm 4k) + 4 + 6 = 5 \cdot (5k^2 \pm 4k + 2).$$

Tehát valamelyik szám biztosan osztható 5-tel, és nem lehet egyenlő 5-tel, így nem prím. Tehát az 5 az egyetlen megfelelő prímszám. 

2. Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszögben a két befogó hosszának összege a háromszögbe és a háromszög köré írt kör átmérőjének összegével egyenlő.



A beírt kör érintési pontjai szakaszokra bontják a háromszög oldalait, jelölje ezek hosszát az ábrán látható módon x, y, r . Azonos betűvel jelölt szakaszok egyenlő hosszúak, mert külső pontból a beírt körhöz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak. Másrészt az érintő pontban húzott sugár párhuzamos a másik befogóval, így a derékszögű csúcsnál egy négyzet keletkezik, mert olyan téglalap, aminek két szomszédos oldala egyenlő hosszú. A két befogó hosszának összege $2r + x + y$. A beírt kör sugara r , így átmérője $2r$. Thalész tétele miatt a körülírt kör átmérője éppen a derékszögű háromszög átfogója, melynek hossza $x + y$. Tehát az egyenlőség valóban teljesül.



3. Az A-ból B-be vezető út 11,5 km hosszú. Először emelkedőn vezet, ezután vízszintes szakasz jön, majd lejtő következik. A-ból B-be egy gyalogos 2 óra 54 perc alatt tette meg az utat, visszafelé B-ből A-ba ugyanez az út 3 óra 6 percig tartott. Emelkedőn 3 km/óra, vízszintes terepen 4 km/óra, lejtőn 5 km/óra sebességgel ment. Milyen hosszú volt a vízszintes rész az A-ból B-be vezető úton?

Jelölje az odafele irányban az emelkedő hosszát x , a vízszintes szakasz hosszát y , ekkor a lejtő hossza $11,5 - x - y$. Az eltelt idő = távolság/sebesség megfelelő mértékegységek esetén. 2 óra 54 perc az 2,9 óra, míg 3 óra 6 perc az 3,1 óra. Tehát

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{11,5 - x - y}{5} = 2,9;$$

$$\frac{11,5 - x - y}{3} + \frac{y}{4} + \frac{x}{5} = 3,1.$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{11,5 - y}{3} + \frac{11,5 - y}{5} + \frac{y}{2} = 6$$

Ezt rendezve $y = 4$ adódik. Tehát a vízszintes szakasz hossza 4 km.



4. Egy háromszög oldalainak hossza 5, 12, 13 egység. Hány olyan pont van a háromszög belsejében, amelynek az oldalaktól mért távolsága egész szám?

A háromszög derékszögű, mert

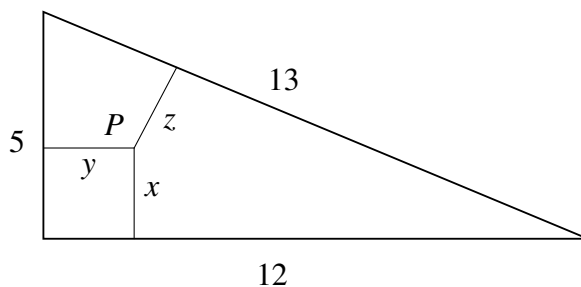
$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

P távolsága az oldalaktól legyen x, y, z . Ekkor a háromszög területe:

$$\frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{12x + 5y + 13z}{2}$$

azaz $60 = 12x + 5y + 13z$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $z + 5y = 12(5 - z - x)$. A távolságok pozitívak, ezért

$$0 < x + z < 5.$$



Mivel mindkettő legalább 1, és egészek, ezért három eset lehetséges:

- $x + z = 2$,
- $x + z = 3$,
- $x + z = 4$

Ezeket rendre megvizsgálva:

- $x = z = 1, y = 7$ jó.
- $x = 1, z = 2, y = 22/5$ nem jó.
 $x = 2, z = 1, y = 23/5$ nem jó.
- $x = 1, z = 3, y = 9/5$ nem jó,
 $x = 3, z = 1, y = 11/5$ nem jó,
 $x = z = y = 2$ jó.

Vagyis a megoldások: $x = 1, y = 7, z = 1$ és $x = 2, y = 2, z = 2$.



5. A 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 számjegyekből állítsunk össze 5 db kétjegyű tízes számrendszerbeli számot úgy, hogy az 5 szám szorzata a lehető legnagyobb legyen.

Érdemes a tízes helyiértékekre a nagyobb számjegyeket rakni, hiszen ha például a 9 egyes helyiértéken szerepel, ebben a számban megcserélve a két számjegyet, nő a szám, így a szorzat is. 9 mellé 0-t érdemes rakni, mert ha nem, érdemes lenne azzal a számmal cserélni, ahol 0 áll az egyes helyiértéken.

$$(90 + a) \cdot (10b + 0) = 900b + 10ab < 900b + 90a = (90 + 0) \cdot (10b + a),$$

mert $b < 9$. Így az egész szorzat is nő, mert a többi szám nem változott. Tehát a számok között szerepelnie kell a 90-nek. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva a következő legnagyobb és legkisebb számjegyre kapjuk, hogy a 81-nek is szerepelnie kell. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy akkor a legnagyobb a szorzat, ha az 5 szám a 90, 81, 72, 63, 54.



Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy ha p prímszám és $5p^2 - 2$ is prímszám, akkor $5p^2 - 4$ és $5p^2 + 2$ is prímszámok!

Vizsgáljuk meg, hogy a p prím milyen maradékot adhat 3-mal osztva. Egyetlen prím ad 0 maradékot, a 3. Ebben az esetben $5p^2 - 2 = 43$, $5p^2 - 4 = 41$ és $5p^2 + 2 = 47$ is prímszámok.

Ha $p = 3k + 1$ valamely k egész számra, akkor

$$5p^2 - 2 = 5 \cdot [3(3k^2 + 2k) + 1] - 2 = 3m + 5 - 2 = 3(m + 1)$$

és nem lehet egyenlő 3-mal, ezért nem prím.

Ha $p = 3k + 2$ akkor is $p^2 = 3n + 1$, így hasonlóan $3 \mid 5p^2 - 2$ és nem lehet egyenlő 3-mal, ezért nem prím. Tehát az állítás igaz, mert a feltétel csak a $p = 3$ esetben teljesül.



2. Az $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldala AB és CD . Igazoljuk, hogy

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot CD.$$

D és C merőleges vetülete az AB oldalra legyen E és F . Ekkor az ACF és BFC , illetve ADE és BED háromszögekben felírva a Pitagorasz-tételt, kapjuk, hogy

$$AC^2 - AF^2 = FC^2 = BC^2 - BF^2;$$

$$BD^2 - BE^2 = DE^2 = DA^2 - AE^2.$$

A két egyenletet összeadva és rendezve kapjuk, hogy

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 + (AF^2 - BF^2) + (BE^2 - AE^2).$$

Az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ azonosságot felhasználva írhatjuk, hogy

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 + (AF + BF)(AF - BF) + (BE + EA)(BE - EA).$$

$AF + BF = AE + BE = AB$, ezért

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= BC^2 + AD^2 + AB(AF - BF) + AB(BE - EA) = \\ &= BC^2 + AD^2 + AB(AF + BE - AE - BF) = BC^2 + AD^2 + AB \cdot 2 \cdot EF = \\ &= BC^2 + AD^2 + AB \cdot 2 \cdot CD. \end{aligned}$$



3. Egy kör kerületére felírtak 13 pozitív egész számot. Tudjuk, hogy bármely 4 szomszédos szám összege legfeljebb 21, és bármely 5 szomszédos szám összege legalább 26. Számítsuk ki a 13 szám összegét!

Jelölje S a 13 szám összegét. Ha az összes lehetséges módon felírjuk 5 szomszédos szám összegét, minden szám pontosan 5 ilyen összegben szerepel. Tehát

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + \dots \\ + (a_{13} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 5 \cdot S \geq 13 \cdot 26 \end{aligned}$$

Innen $S \geq \frac{13 \cdot 26}{5} = 67,6$. Hasonlóan

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + \dots \\ + (a_{13} + a_1 + a_2 + a_3) = 4 \cdot S \leq 13 \cdot 21 \end{aligned}$$

Innen $S \leq \frac{13 \cdot 21}{4} = 68,25$.

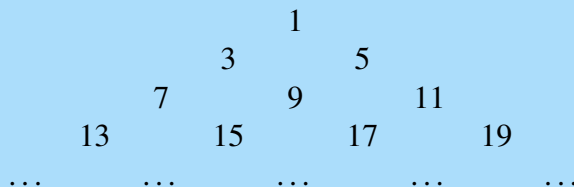
S egész szám, ezért $S = 68$.

Ezt meg is lehet valósítani, ha az következő számokat írjuk körben a körre: 5, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 5, 6. Ekkor ugyanis bármely 4 szomszédos szám között legfeljebb egy 6-os van, így az összeg legfeljebb 21, másrészt bármely 5 szomszédos között van legalább egy hatos, így az összegük legalább 26.



4. A következő végtelen számháromszögben a páratlan pozitív egész számok találhatók.

- (a) Melyik szám áll az n . sor végén?
 (b) Mennyi az n . sorban álló számok összege?
 (c) Mennyi az első n sorban álló számok összege?



- (a) Az n . sor végén az $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. páratlan szám áll, hiszen a sorokban rendre eggyel több szám áll, mint az előzőben. A k . páratlan szám $2k - 1$, ezért az $\frac{n(n+1)}{2}$. páratlan szám a $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1$.
- (b) Az n . sorban az első szám az $(n-1)^2 + (n-1) - 1 + 2 = (n-1)^2 + (n-1) + 1$, az utolsó szám az $n^2 + n - 1$. Összesen n tag, amelyek 2 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. A tagok összege

$$\begin{aligned} n[(n-1)^2 + (n-1) + 1] + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) &= \\ &= n[(n-1)^2 + (n-1) + 1] + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \\ &= n[(n-1)^2 + 2(n-1) + 1] = n^3. \end{aligned}$$

- (c) Az első n sorban álló számok összege az előző rész alapján az első n köbszám összege. Az első n köbszám összege $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Megjegyzés: A fenti megoldás felhasználta az első n köbszám összegére vonatkozó képletet, ami nem része a 8. osztályban elvárható ismeretanyagának. A képlet bizonyítása:

A sorozat első néhány tagja: 1, 9, 36, 100, 225, ... Észrevehetjük, hogy a sorozat tagjai négyzet-számok, és gyököt vonva éppen az első n pozitív egész szám összegét kapjuk. A megsejtett képlet ezek alapján $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Ennek helyességét teljes indukcióval igazolhatjuk.

$n = 1$ esetén $1 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2$ teljesül.

Az indukciós feltevés szerint n -re igaz az állítás. Ekkor az első $n+1$ köbszám összege

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Tehát ha a képlet igaz n -re, akkor $n+1$ -re is. Tehát a képlet minden pozitív egész számra igaz. 

XLI. VERSENY 2011–12.

FELADATOK

Megyei forduló

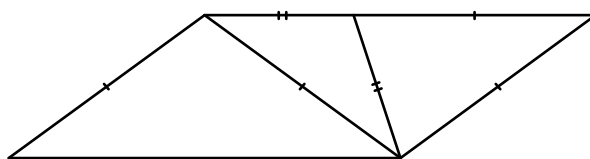
1. Három szám összege 66. Az első szám háromszorosa a másodiknak, a második szám 14-gyel több, mint a harmadik. Számítsuk ki a három számot. ➡
2. Az AB és CD szakaszok közös része a CB szakasz. Az $AB = 20$ cm, $CD = 24$ cm és $CB = 8$ cm. Mekkora az AD szakasz? ➡
3. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, a tízes számrendszerben, amelyre igaz, hogy a számjegyei szorzata 100? ➡
4. A 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelynek számjegyei különbözők? Mennyi ezeknek a háromjegyű számoknak az összege? ➡

Megyei forduló

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege 2012? ➡
2. Az $ABCD$ téglalap AB , illetve CD oldalán a P és R pontok az A -hoz, illetve C -hez közelebbi harmadoló pontok. A Q és S pontok a BC , illetve DA oldalak felezőpontjai. Hányad része a $PQRS$ paralelogramma területe az $ABCD$ téglalap területének? ➡
3. Tizenkét egymást követő pozitív egész szám összege 246. Melyek ezek a számok? ➡
4. Az 1-től el kell jutni a 2012-ig pozitív egész számokon át a következő kétféle művelet alkalmazásával: az utoljára kapott számhoz 1-et adunk, vagy a számot megkétszerezzük. Mely számokon át vezet az út 1-től 2012-ig a lehető legkevesebb lépésben? ➡

Megyei forduló

1. A 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan 6-tal osztható négyjegyű szám készíthető, amelynek a számjegyei különbözők? →
2. A hetedik osztályosok 40%-a fiú, a többi lány. A hetedikes lányok 20%-a szemüveges. A hetedik osztály hány százalékát teszik ki a nem szemüveges lányok? →
3. Igazoljuk, hogy ha p és $p^2 + 8$ prímszámok, akkor $p^2 + p + 1$ is prímszám! →
4. Egy paralelogramma az ábrán látható módon három egyenlőszárú háromszögre bontható. Számítsuk ki a paralelogramma szögeit. →



5. Adott egy háromszög, és a belsejében 30 pont úgy, hogy ezek közül semelyik 3 sem esik egy egyenesbe, és bármely két belső pont által meghatározott egyenesen nincs rajta a háromszög egyik csúcsa sem. A háromszöget kisebb háromszögekre bonthatjuk úgy, hogy minden ilyen részháromszög minden csúcsa valamelyik belső pont, vagy a háromszög csúcsa, és mind a 30 belső pont és a 3 csúcs is valamelyik kis háromszög (esetleg többnek is) csúcsa. Hány kis háromszögből áll a felbontás? →

Megyei forduló

1. Igazoljuk zsebszámológép használata nélkül, hogy

$$2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 16$$

négyszetszám.

2. Állítsuk elő 2013-at a lehető legtöbb egymást követő pozitív egész szám összegeként. →
3. Adjunk meg 20 nullától különböző (egymástól nem feltétlenül különböző) egész számot úgy, hogy ezeket egy sorba írva bármely három szomszédos szám összege negatív, de az összes (20 darab) szám összege pozitív legyen. →
4. Az ABC derékszögű háromszög AB befogóján a P , BC befogóján pedig a Q pontot úgy vettük fel, hogy $AP = CB$ és $BP = CQ$. Igazoljuk, hogy az AQ és CP szakaszok szöge 45° . →
5. Egy 5×5 -ös táblázat mind a 25 mezőjébe $+1$ -et, vagy -1 -et írtunk. Minden sor jobb oldalára írtuk a sorban szereplő számok szorzatát, és minden oszlop alá az oszlopban szereplő számok szorzatát. Lehet-e az így kapott 10 szám összege 0? →

Országos döntő

1. Melyik az a legkisebb, tízes számrendszerbeli pozitív egész szám, amelyben a számjegyek szorzata 200? ➡
2. Adjunk meg három különböző pozitív egész számot úgy, hogy a középső szám a másik kettő összegének a fele és a három szám szorzata egy egész szám négyzete legyen. ➡
3. Számítsuk ki 1-től 10000-ig a pozitív egész számok számjegyeinek összegét. ➡
4. Van 60 darab 1 cm oldalú kis kockánk, tömör téglatestet akarunk belőlük építeni. Hány különböző tömör téglatest építhető ezekből, ha az építéshez mind a 60 kis kockát fel kell használni? ➡

Országos döntő

1. Hány olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek (balról jobbra), növekvő sorrendben követik egymást? És hány olyan van, amelyben csökkenő sorrendben követik egymást? ➡
2. Hány olyan 4-jegyű, tízes számrendszerbeli szám van, amely nem változik, ha felcseréljük az egyesek és az ezresek helyén álló számjegyet? ➡
3. Leírjuk egymás mellé sorra 1-től kezdve a pozitív egész számokat: 123456789101112... Melyik számjegy áll ebben a sorban a 2012-edik helyen? ➡
4. Egy 5 cm oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 1 cm oldalú kis szabályos háromszögekre bontottunk. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek csúcsai az így kapott háló rácspontjai közül kerülnek ki? ➡

Országos döntő

1. Két pozitív egész szám különbsége 2012. Ha a nagyobbik szám végéről elhagyjuk a 0 számjegyet, akkor az így kapott számnak a 6-szorosa a kisebbik szám. Melyik ez a két szám? ➡
2. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható 7-tel, de 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztva mindig 1 maradékot ad? ➡
3. Adjunk meg 4 különböző pozitív egész számot úgy, hogy ha ezeket páronként összeadjuk, akkor a kapott számok hat egymást követő pozitív egész számot alkotnak. ➡
4. Az 5×5 -ös sakktábla minden mezőjére egy-egy „bogarat” teszünk. Adott idő alatt minden bogár átmászik valamelyik élszomszédos mezőre. Előfordulhat-e, hogy ekkor is minden mezőn lesz bogár? ➡

Országos döntő

1. Melyik nagyobb: 2^{300} vagy 3^{200} ? 
2. Számítsuk ki minél egyszerűbben a következő összeget:

$$\frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \frac{1}{4 \cdot 15} + \frac{1}{5 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{31 \cdot 96}$$
 
3. Egy futóversenyen két csapat indult, mindegyik csapat 7 versenyzővel. Mindenki annyi pontot kapott 1 és 14 pont között, ahányadik helyen végzett (holtverseny nem volt). A végén összeadták a csapattagok pontjait, ez lett a csapatverseny eredménye. Tehát az a csapat győzött, amelyiknek kevesebb pontja lett. Hányféle pontszámot érhetett el a győztes csapat? 
4. Hány olyan 3, 4 és 5 hosszúságú sorozat van, amelynek minden tagja a 0 vagy az 1 számjegy, és nincs benne két szomszédos 1? 

Országos döntő

1. Számítsuk ki a következő 13 tört összegét:

$$\frac{11}{13} + \frac{1111}{1313} + \frac{111111}{131313} + \dots + \frac{11 \dots 11}{13 \dots 13}.$$
 
2. Tíz különböző pozitív egész szám összege 62. Igazoljuk, hogy a számok szorzata osztható 60-nal. 
3. Az a , b és c számjegyeket jelöl. Van-e négyzetszám az $abcabc$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok között? 
4. Melyek azok az n egész számok, amelyekre a $\frac{3n-6}{n+3}$ tört értéke egész szám? 
5. Egy tetszőleges háromszöget daraboljunk fel négy egyenlőszárú háromszögre. 

Országos döntő

1. 13 különböző pozitív egész szám összege 92. Melyek ezek a számok? 
2. Egy régi feladat: „Egy gazdag ember elment a vásárba és vett kecskéket, birkákat és malacokat. A kecskék darabjáért 2 aranyat, a birkák darabjáért 4 aranyat, a malacok darabjáért 5 aranyat fizetett, így összesen 54 aranyat adott ki az állatokért. 22 állatot vitt haza a vásárból. Hányat vitt haza az egyes állatfajtákból?” 
3. Az a és b számjegyekről tudjuk, hogy $a \cdot b = a + b + 1$. Melyek lehetnek a $10a + b$ alakú kétjegyű számok? 
4. Adott egy 120° -os szárszögű egyenlőszárú háromszög. Daraboljuk fel 5 egyenlőszárú háromszögre. 

Országos döntő

1. Melyek azok az n egész számok, amelyekre az $\frac{n^2+5n+10}{n+13}$ tört értéke is egész szám? ➔
2. Lehet-e 2^{100} legalább két egymást követő pozitív egész szám összege? ➔
3. Egy szabályos dobókockát háromszor feldobunk. Hányféle eredményt kaphatunk, ha csak az számít, hogy hány 1-est, 2-est, 3-ast, 4-est, 5-öst, 6-ost dobtunk? ➔
4. Az ABC háromszög AB és AC oldalára (kifelé) megszerkesztjük az $ABDE$ és $ACFG$ paralelogrammákat. A DE és FG egyenesek a P pontban metszik egymást. A B , illetve C ponton át az AP egyenessel párhuzamosokat húzunk, ezek a DE , illetve FG egyeneseket a Q , illetve R pontban metszik. Igazoljuk, hogy $BCQR$ paralelogramma, és ennek területe egyenlő az $ABDE$ és $ACFG$ paralelogrammák területének összegével. ➔
5. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$ab + 2a + 3b = 36.$$



Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy 121, 10201, 1002001 teljes négyzet (négyzetszám). Általánosítsunk! ➔
2. Szabályos háromszöget daraboljunk fel 5 egyenlőszárú háromszögre. ➔
3. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben a számjegyek (balról jobbra) nem csökkenő sorrendben követik egymást? ➔
4. Igazoljuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 7 \geq 2,$$

ha x, y tetszőleges valós számok!



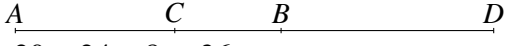
MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

1. Három szám összege 66. Az első szám háromszorosa a másodiknak, a második szám 14-gyel több, mint a harmadik. Számítsuk ki a három számot.

Ha a harmadik számot a -val jelöljük, akkor a szöveg alapján a második szám $a + 14$, az első szám pedig $(a + 14) + (a + 14) + (a + 14)$. Vagyis a 3 szám összege éppen $5a + 56$. Mivel ez 66, ezért $5a = 10$, vagyis $a = 2$, amiből következik, hogy a három szám: 48, 16 és 2. 

2. Az AB és CD szakaszok közös része a CB szakasz. Az $AB = 20$ cm, $CD = 24$ cm és $CB = 8$ cm. Mekkora az AD szakasz?

Készítsünk ábrát!  Az ábráról leolvasható, hogy $AD = AB + CD - CB = 20 + 24 - 8 = 36$. 

3. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, a tízes számrendszerben, amelyre igaz, hogy a számjegyei szorzata 100?

A 100-at egyféleképpen lehet 3 tényező szorzatára bontani, ha azt szeretnénk, hogy minden tényező számjegy legyen: $100 = 4 \cdot 5 \cdot 5$. Mivel két számjegy szorzataként nem állítható elő a 100 (a lehetséges legnagyobb szorzat a $9 \cdot 9 = 81$), ezért a legkisebb szám háromjegyű és a fentiek miatt ez a 455. 

4. A 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelynek számjegyei különbözők? Mennyi ezeknek a háromjegyű számoknak az összege?

Az első jegy 4-féle, a második 3-féle, ami után a harmadik 2-féle lehet. Mivel bármely első jegy választása esetén lehetséges a maradék 3 jegy stb., így a lehetőségek összeszorzódnak, vagyis $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ilyen szám létezik.

Első megoldás a második kérdésre: Minden helyiértéken minden lehetséges számjegy 6-szor szerepel (egy rögzített számjegy mellett a maradék két hely $3 \cdot 2$ féleképpen tölthető ki). Ezért az egyesek helyén álló számjegyek összege: $6 \cdot (3 + 4 + 5 + 6) = 108$. Ugyanennyi a tízesek és a százaskok helyén álló számjegyek összege is, így a 24 szám összege: $10800 + 1080 + 108 = 11988$.

Második megoldás a második kérdésre: Párosítsuk a számokat úgy, hogy minden helyiértéken a két szám számjegyeinek az összege 9 legyen. Vagyis egy párt alkot a 463 és az 536, illetve a 345 és a 654 is. Mivel minden számnak pontosan egy párja van a 24 szám között, ezért pontosan 12 pár alakul ki ily-módon a számokból. De egy párban a két szám összege mindig 999, vagyis a 24 szám összege: $12 \cdot 999 = 11988$. 

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege 2012?

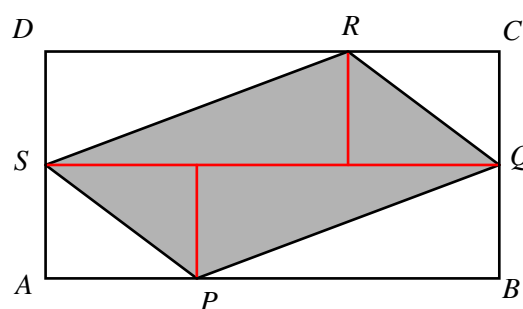
Hivatalos megoldás: A legkisebb pozitív egésznek a számjegyei a lehető legnagyobbak, tehát a legtöbb 9-es szerepel benne. Mivel $2012 = 9 \cdot 223 + 5$, ezért a keresett szám 224 jegyű, az első jegye 5-ös, a többi 223 jegye 9-es.

Részletes indoklás:

- A szám legalább 224 jegyű, mivel 223 db számjegy összege legfeljebb $223 \cdot 9 = 2007$. (Ez a *skatulyaelv* egy formája.)
- Két szám közül az a kisebb, amelyik kevesebb jegyből áll. Tehát ha találunk egy 224 jegyű számot, melynek számjegyeinek összege 2012, akkor a 224-nél több jegyű számokat kizárhatjuk. Ilyen 224 jegyű szám pl.: 86999...9, amely számban 222 db 9-es szerepel. ($8 + 6 + 222 \cdot 9 = 2012$)
- A 224 jegyű számok közül az a kisebb, amelyikben kisebb számjegy szerepel az első helyen.
- A keresett 224 jegyű számunk 4, vagy annál kisebb számjeggyel nem kezdődhet, mivel ekkor számjegyeinek összege legfeljebb $4 + 223 \cdot 9 = 2011$ lehetne.
- Az utóbbi két pont alapján, ha van 224 jegyű szám, mely 5-tel kezdődik és számjegyeinek összege 2012, akkor az a szám vagy azon a számok egyike lesz a keresett szám.
- Csak egyetlen 5-tel kezdődő 224 jegyű szám van, melynek számjegyeinek összege 2012, ez az 5999...9, ahol 223 db 9-es szerepel a számban. Tehát ez a szám a keresett szám. ↑

2. Az $ABCD$ téglalap AB , illetve CD oldalán a P és R pontok az A -hoz, illetve C -hez közelebbi harmadoló pontok. A Q és S pontok a BC , illetve DA oldalak felezőpontjai. Hányad része a $PQRS$ paralelogramma területe az $ABCD$ téglalap területének?

Kössük össze a Q és S pontokat, és P -ből valamint R -ből állítsunk merőlegest QS -re, ezek talppontjai legyenek X és Y . Mivel Q és S felezőpontok, így $QS \parallel AB \parallel CD$. Ebből következik, hogy az eredeti téglalapot a behúzott szakaszokkal 4 téglalpra bontottuk. Minden téglalap területének a fele tartozik a $PQRS$ paralelogrammához, hiszen az átló felezi egy téglalap területét. Tehát a paralelogramma területe a téglalap területének fele.



Általánosítás: Vegyük észre, hogy a bizonyításnál egyedül azt használtuk fel, hogy a QS szakasz párhuzamos a téglalap egyik oldalával. Tehát ez a bizonyítás ugyanígy működik (azaz a $PQRS$ négyszög területe mindig fele a téglalapénak) ha P , Q , R és S a téglalap négy oldalának tetszőleges pontjai és QS szakaszra teljesül, hogy párhuzamos a téglalap egyik oldalával.

Érdekeség: Az is bizonyítható, hogy a $PQRS$ paralelogramma területe csak akkor fele a téglalapénak, ha átlóinak egyike párhuzamos a téglalap egyik oldalával. (Tehát a téglalap 4 oldalán felvett P , Q , R , S pontok által alkotott $PQRS$ négyszög területe nem a téglalap területének a fele, ha egyik átlója sem párhuzamos a téglalap oldalaival. Ennek bizonyítását az olvasóra bízunk.) ↑

3. Tizenkét egymást követő pozitív egész szám összege 246. Melyek ezek a számok?

Jelöljük a 12 szám legkisebbikét n -nel. Ekkor az összegük: $n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+11) = 12n + \frac{12 \cdot 11}{2} = 12n + 66$. (Itt felhasználtuk a számtani sorozatok Gauss-féle összegzését.) Tehát $12n + 66 = 246$, akkor $n = 15$. Tehát a keresett számok: 15, 16, 17, ..., 26. 

4. Az 1-től el kell jutni a 2012-ig pozitív egész számokon át a következő kétféle művelet alkalmazásával: az utoljára kapott számhoz 1-et adunk, vagy a számot megkétszerezzük. Mely számokon át vezet az út 1-től 2012-ig a lehető legkevesebb lépésben?

Hivatalos megoldás: Induljunk el fordítva, a 2012-től az 1 felé! A két lépés most: 2-vel való osztás, 1 kivonása. Minél több 2-vel való osztást célszerű elvégezni, és minél kevesebb 1 kivonását. Minden páros számot tudunk osztani 2-vel, páratlan számból csak 1-et lehet kivonni. Így a következő sorozatot kapjuk:

2012, 1006, 503, 502, 251, 250, 125, 124, 63, 62, 31, 30, 15, 14, 7, 6, 3, 2, 1.

Tehát 17 lépésben juthatunk el 1-től 2012-ig, de kevesebbel nem.

Részletes indoklás: Az előző érvelésben a „Minél több 2-vel való osztást célszerű elvégezni...” gondolat nehezen bizonyítható, viszont az egyetlen 17 lépésű számsorozat megtalálásához elengedhetetlen.

A továbbiakban csak azt szeretnénk megmutatni, hogy 17 lépésnél kevesebbel nem lehetséges 2012-be jutni. Gondolkodjunk 2-es számrendszerben! Ekkor a „2-vel való szorzásnál” csak egy 0-t írunk a szám végére. Figyeljük meg, hogy a két lehetséges műveletünk során hogyan változik meg a számjegyek száma, a számjegyek összege, valamint ennek a két mennyiségnek az összege, amit jelöljünk T -vel! (T =számjegyek száma+számjegyek összege)

- ×2
- A számjegyek száma 1-gyel nő.
 - számjegyek összege nem változik.

Ebben az esetben tehát T értéke 1-gyel nő.

- +1
- A számjegyek száma csak akkor növekszik 1-gyel, ha a szám csupa egyesből állt (más esetben nem változik).
 - A számjegyek összege csak akkor nő 1-gyel, ha a szám 0-ra végződött. (Egyébként nem változik, vagy csökken.)

Ebben az esetben tehát T legfeljebb 1-gyel nő, hiszen a számjegyek száma és a számjegyek összege nem nőhet egyszerre ennél a műveletnél.

Tehát bármelyik műveletet is végezzük T legfeljebb 1-gyel nő. Az 1 kettes számrendszerben: $1_{(2)}$, így neki a „ T -je”: $T = 2$. A 2012 kettes számrendszerben: $11111011100_{(2)}$, így neki a „ T -je”: $T = 19$. Azaz legalább 17 művelet szükséges.

Ekkor még nem tudjuk, hogy 17 lépéssel lehetséges-e. Itt kell felhasználnunk a hivatalos megoldás végeredményét, hogy mutassunk egy 17 lépésű számsorozatot.

Mivel a feladat nem azt kérdezi, hogy *hány lépéssel*, hanem hogy *mely számokon keresztül* vezet az út 2012-be, így még bizonyítanunk kellene, hogy a hivatalos megoldásban megtalált 17 lépésű sorozat az egyetlen 17 lépésű sorozat, mellyel 2012-be juthatunk. Ennek precíz bizonyítása elég nehéz, és nem túl szép feladat, így ezzel már nem foglalkozunk. (Egyébként a hivatalos megoldás alapgondolatából hosszas, részletes érveléssel kihozható.) 

1. A 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan 6-tal osztható négyjegyű szám készíthető, amelynek a számjegyei különbözők?

Egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal, tehát olyan páros számokat keresünk, melyben a számjegyek összege osztható 3-mal.

Az adott számjegyekből kiválasztott számnégyesek közül csak a $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ és a $2 + 3 + 4 + 6 = 15$ összeg osztható 3-mal, tehát ezekből a számjegyekből lehet 6-tal osztható, négyjegyű számokat készíteni.

A 3, 4, 5, 6 számjegyekből készíthető páros számok 4-re vagy 6-ra végződnek, a többi számjegy pedig tetszőleges sorrendben lehet. Tehát $6 + 6 = 12$ darab 6-tal osztható szám készíthető belőlük.

A 2, 3, 4, 6 számjegyekből készíthető páros számok 2-re, 4-re vagy 6-ra végződnek, a többi számjegy pedig tetszőleges sorrendben lehet. Tehát $6 + 6 + 6 = 18$ darab 6-tal osztható szám készíthető belőlük.

Tehát összesen $12 + 18 = 30$ darab megfelelő számot tudunk elkészíteni.



2. A hetedik osztályosok 40%-a fiú, a többi lány. A hetedikes lányok 20%-a szemüveges. A hetedik osztály hány százalékát teszik ki a nem szemüveges lányok?

Mivel az osztály 40%-a fiú, a 60%-a lány. A lányok 20%-a szemüveges, tehát $\frac{4}{5}$ -e nem szemüveges. $\frac{4}{5} \cdot 60 = 48$, tehát az osztály 48%-a nem szemüveges lány.



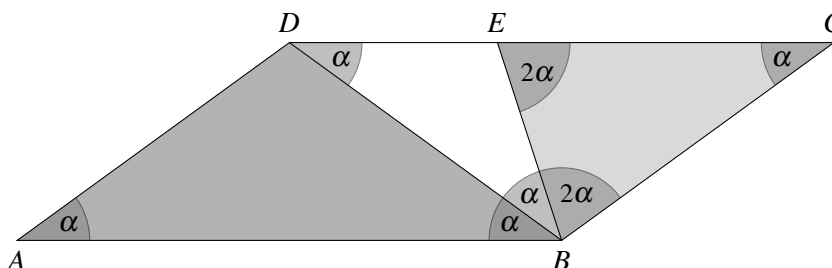
3. Igazoljuk, hogy ha p és $p^2 + 8$ prímszámok, akkor $p^2 + p + 1$ is prímszám!

Ha $p = 3$, akkor $p^2 + 8 = 17$ és $p^2 + p + 1 = 13$ prímek, tehát igaz az állítás. Ha $p \neq 3$, akkor p hármas maradéka 1 vagy 2. Ekkor p^2 hármas maradéka 1, tehát $p^2 + 8$ osztható 3-mal. Mivel $p^2 + 8$ nem lehet 3, és osztható hárommal, így nem lehet prím.



4. Egy paralelogramma az ábrán látható módon három egyenlőszárú háromszögre bontható. Számítsuk ki a paralelogramma szögeit.

Nevezzük el a pontokat az ábrán látható módon. Legyen $\angle DAB = \angle BCD = \alpha$.



Az ábrába beírt szögek adódnak felhasználva az adott egyenlőszárú háromszögeket illetve, hogy a BED háromszögnek a $\angle BEC$ külső szöge. Végül a BCE háromszög szögeinek összege 180° , azaz $\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$. Tehát a paralelogramma szögei 36° és 144° .



5. Adott egy háromszög, és a belsejében 30 pont úgy, hogy ezek közül semelyik 3 sem esik egy egyenesbe, és bármely két belső pont által meghatározott egyenesen nincs rajta a háromszög egyik csúcsa sem. A háromszöget kisebb háromszögekre bonthatjuk úgy, hogy minden ilyen részháromszög minden csúcsa valamelyik belső pont, vagy a háromszög csúcsa, és mind a 30 belső pont és a 3 csúcs is valamelyik kis háromszög (esetleg többnek is) csúcsa. Hány kis háromszögből áll a felbontás?

Jelöljük k -val a keletkezett kis háromszögek számát. A kis háromszögek szögeinek összege így $k \cdot 180^\circ$.

Számoljuk össze más módon is a részháromszögek szögeinek összegét. A belső pontok körül elhelyezkedő szögek összege $30 \cdot 360^\circ$, ezen kívül még a nagy háromszög csúcsaiban levő szögek összege 180° . Ez összesen: $30 \cdot 360^\circ + 180^\circ = 61 \cdot 180^\circ$.

A kétféle számolás eredménye nyilván azonos, tehát $k = 61$.



Megyei forduló

1. Igazoljuk zsebszámológép használata nélkül, hogy

$$2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 16$$

négyzetszám.

Négy egymást követő páratlan szám szorzatához adunk 16-ot, ezért érdemes általánosan számolni. Egyszerűsödik a számolás, ha a számok átlagát választjuk $2k$ -nak, ahol k tetszőleges pozitív egész.

$$\begin{aligned}(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3) + 16 &= (4k^2-9)(4k^2-1) + 16 = \\ &= 16k^4 - 40k^2 + 25 = (4k^2-5)^2.\end{aligned}$$

Beláttuk, hogy az általános esetben a kifejezés felírható egy egész szám négyzeteként, ezzel igazoltuk, hogy $2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 16$ négyzetszám.



2. Állítsuk elő 2013-at a lehető legtöbb egymást követő pozitív egész szám összegeként.

A legkisebb számot $n+1$ -gyel, a tagok számát k -val jelölve azt kapjuk, hogy

$$(n+1) + (n+2) + \dots + (n+k) = 2013.$$

Ebből a sorrend felcserélésével adódik, hogy $kn + \frac{k(k+1)}{2} = 2013$, mert az első k pozitív egész összege $\frac{k(k+1)}{2}$. Kettővel szorozva és a k közös szorzótényezőt kiemelve kapjuk, hogy $k(2n+k+1) = 4026$. k és $2n+1+k$ különböző paritásúak, valamint $2n+1+k > k$, ahol n, k pozitív egészek. Ezen feltételek mellett szeretnénk k -t a lehető legnagyobbak választani. 4026 prímtényező felbontása: $4026 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$. $k = 61$ és $2n+1+k = 66$ kielégíti az összes feltételt. Ha k ennél nagyobb lenne, $2n+1+k$ kisebb lenne nála, ami nem lehet. Ehhez az esethez tartozó konkrét előállítás: $n = (66 - 1 - 61)/2 = 2$, tehát $2013 = 3 + 4 + \dots + 62 + 63$.



3. Adjunk meg 20 nullától különböző (egymástól nem feltétlenül különböző) egész számot úgy, hogy ezeket egy sorba írva bármely három szomszédos szám összege negatív, de az összes (20 darab) szám összege pozitív legyen.

Például a következő konstrukció jó megoldást ad: a, b pozitív egészek, a 20 szám :

$$a, -b, -b, a, -b, -b, \dots, a, -b, -b, a, -b.$$

Itt bármely három szomszédos szám összege $a - 2b$, a 20 szám összege pedig $7a - 13b$, tehát a feltételek szerint egyrészt $a - 2b < 0$, másrészt $7a - 13b > 0$. A két egyenletet átrendezve és összevetve kapjuk, hogy $\frac{13}{7}b < a < 2b$, azaz $13b < 7a < 14b$. A kapott egyenlőtlenségeket kielégítik például az $a = 17, b = 9$, illetve az $a = 27, b = 14$. Ezekből a következő két megfelelő sorozatot kapjuk:

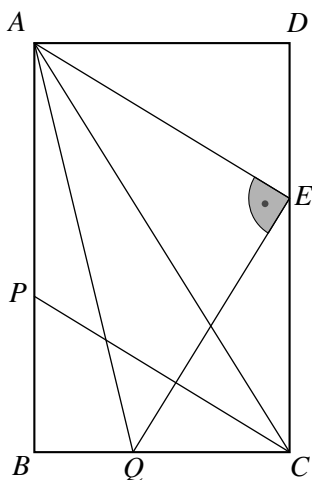
$$\begin{aligned} &17, -9, -9, 17, -9, -9, \dots, 17, -9, -9, 17, -9; \\ &27, -14, -14, 27, -14, -14, \dots, 27, -14, -14, 27, -14. \end{aligned}$$

Számos ezektől különböző helyes megoldás található, például

$$9, -2, -8, 9, -2, -8, \dots, 9, -2, -8, 9, -2.$$



4. Az ABC derékszögű háromszög AB befogóján a P , BC befogóján pedig a Q pontot úgy vettük fel, hogy $AP = CB$ és $BP = CQ$. Igazoljuk, hogy az AQ és CP szakaszok szöge 45° .



Egészítsük ki az ABC derékszögű háromszöget az ábrán látható módon az $ABCD$ téglalappá. Az E pontot vegyük fel a CD oldalon úgy, hogy AE párhuzamos legyen CP -vel. Ekkor $APCE$ paralelogramma, így szemközti oldalai egyenlő hosszúak. A téglalap oldalhosszából kivonva a paralelogramma oldalhosszát kapjuk, hogy $DE = BP$. A feltétel szerint $BP = CQ$, tehát $DE = CQ$. $CE = AP = BC = AD$, tehát $CE = AD$. Így az AED és EQC háromszögek egybevágóak, mert befogóik páronként egyenlő hosszúak. Így $AE = QE$ és $QEA \sphericalangle = 90^\circ$, mert a mellette lévő két szög egy derékszögű háromszög két hegyesszöge, melyek összege 90° . Tehát AEQ egyenlőszárú derékszögű háromszög, így $QAE \sphericalangle = 45^\circ$. Mivel AE párhuzamos CP -vel, ezért az AQ és CP szakaszok szöge is 45° .



5. Egy 5×5 -ös táblázat mind a 25 mezőjébe $+1$ -et, vagy -1 -et írtunk. Minden sor jobb oldalára írtuk a sorban szereplő számok szorzatát, és minden oszlop alá az oszlopban szereplő számok szorzatát. Lehet-e az így kapott 10 szám összege 0?

Szorozzuk össze az egyes sorok végére és az egyes oszlopok aljára írt 5-5 számot. Ebben a szorzatban a táblázatban lévő összes szám pontosan kétszer szerepel szorzótényezőként. A táblázatban minden szám négyzete 1, ezért ez a szorzat is biztosan 1. Így a felsorolt 10 szám között biztosan páros számú -1 -es szerepel. Másrészt az összeg csak úgy lehetne 0, ha 5 darab $+1$ és 5 darab -1 szerepelne. Az 5 páratlan, ezzel beláttuk, hogy a 10 szám összege nem lehet 0.



Országos döntő

1. Melyik az a legkisebb, tízes számrendszerbeli pozitív egész szám, amelyben a számjegyek szorzata 200?

$200 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Minden számjegy a prímtényezők szorzata (vagy 1). A 200-at nem lehet úgy két tényezőre bontani, hogy mindkét tényező számjegy legyen, így a szám legalább háromjegyű. Ekkor a számjegyek csak az 5, 5, 8 számok lehetnek, hiszen az $5 \cdot 2$, nem számjegy. Az ilyen jegyű számok között az 558 a legkisebb. 

2. Adjunk meg három különböző pozitív egész számot úgy, hogy a középső szám a másik kettő összegének a fele és a három szám szorzata egy egész szám négyzete legyen.

Ha találunk három olyan négyzetszámot, amelyekre teljesül, hogy a középső szám a másik kettő összegének fele, akkor készen vagyunk, mivel négyzetszámok szorzata négyzetszám. Könnyen látható, hogy az 1, 25, 49 számhármast jó lesz, mivel $25 = \frac{1+49}{2}$.

Megjegyzés. Ha $a < b < c$ három különböző pozitív egész szám úgy, hogy a középső szám a másik kettő összegének a fele, azaz $b = \frac{a+c}{2}$, akkor tetszőleges x pozitív számmal vett szorzatukra, $a \cdot x < b \cdot x < c \cdot x$ -re is teljesül ez, mivel ekkor $b \cdot x = \frac{a \cdot x + c \cdot x}{2}$. (Három ilyen tulajdonságú számot háromtagú számtani sorozatnak neveznek.) A fenti három szám a, b, c szorzata $a \cdot b \cdot c$, ami nem kell, hogy négyzetszám legyen. Ha most végigszorozzuk az a, b, c hármast az $x = a \cdot b \cdot c$ -vel, akkor az $a^2 \cdot b \cdot c, a \cdot b^2 \cdot c, a \cdot b \cdot c^2$ számhármast kapjuk, ahol már a számok szorzata négyzetszám: $a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 = (a^2 \cdot b^2 \cdot c^2)^2$.

Tehát másik megoldást kaphatunk, ha például az $a = 1, b = 2, c = 3$ számhármast végigszorozzuk a szorzatukkal, $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ -tal. Azaz a 6, 12, 18 egy másik jó megoldás. 

3. Számítsuk ki 1-től 10000-ig a pozitív egész számok számjegyeinek összegét.

Első megoldás: Tegyük félre a 10000-et. Leszámolhatjuk a kérdéses összeget helyi értékenként is. $0 \leq n \leq 9999$ számok között minden helyi értéken minden számjegy pontosan 1000-szer szerepel. Ugyanis egy rögzített számjegy mellett a maradék három hely $10 \cdot 10 \cdot 10$ féleképpen tölthető ki. (Itt pl. 0024-ként gondolunk a 24-re). A tíz számjegy összege $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Tehát az egyesek helyi értékén lévő számjegyek összege $45 \cdot 1000 = 45\,000$. Hasonlóan a tízesek, százaskok, ezresek helyi értékén. Ez $4 \cdot 45\,000 = 180\,000$ és ehhez jön még a 10000 jegyeinek összege.

Második megoldás: Tegyük félre a 10000-et. Vegyük észre, hogy a 0 és a 9999 számjegyeinek összege 36. Hasonlóan az 1 és a 9998 számjegyeinek az összege is 36. Általában is igaz az állítás! Jelölje $S(n)$ az n természetes szám számjegyeinek az összegét. Ekkor $S(n) + S(9999 - n) = 4 \cdot 9 = 36$, ahol $0 \leq n \leq 9999$. 5000 ilyen párt lehet képezni. Eddig $5000 \cdot 36 = 180\,000$ az összeg. Hiányzik még a 10000 számjegyeinek az összege. A válasz tehát 180001. 

4. Van 60 darab 1 cm oldalú kis kockánk, tömör téglatestet akarunk belőlük építeni. Hány különböző tömör téglatest építhető ezekből, ha az építéshez mind a 60 kis kockát fel kell használni?

Első megoldás: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Jelöljük a téglatest oldalait a -val, b -vel és c -vel, továbbá tegyük fel, hogy $a \leq b \leq c$. Táblázatban adjuk meg a lehetőségeket:

a	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
b	1	2	3	4	5	6	2	3	5	4
c	60	30	20	15	12	10	15	10	6	5

Tehát 10 téglatestet lehet összeállítani.

Második megoldás: A $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ prímtényezőit kell 3 csoportba osztani (egy csoport üres is lehet, ekkor a kocka ezen éle 1 hosszú). Az első esetben a 3-as és 5-ös prímtényező különböző csoportba kerüljön. Ekkor három lehetséges kockát kapunk, ha a két 2-es prímtényező egy csoportba kerül.

a	$2 \cdot 2$	1	1
b	$3 \cdot 2 \cdot 2$	$3 \cdot 2 \cdot 2$	3
c	5	5	$5 \cdot 2 \cdot 2$

Még három lehetséges kockát kapunk, ha a két 2-es prímtényező különböző csoportba kerül.

a	1	2	2
b	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 2$	3
c	$5 \cdot 2$	5	$5 \cdot 2$

A második esetben a 3-as és 5-ös prímtényező azonos csoportba kerül. Két lehetséges kockát kapunk, ha a két 2-es prímtényező egy csoportba kerül. Még két lehetséges kockát kapunk, ha a két 2-es prímtényező különböző csoportba kerül.

a	1	1	1	2
b	1	$2 \cdot 2$	2	2
c	$3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 5 \cdot 2$	$3 \cdot 5$

Tehát összesen $2 + 2 + 3 + 3 = 10$ lehetőség van.



Országos döntő

- Hány olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek (balról jobbra), növekvő sorrendben követik egymást? És hány olyan van, amelyben csökkenő sorrendben követik egymást?

Növekvő sorrend: Mivel a szám nem kezdődhet 0-val, így csak a maradék 9 számjegyet használhatjuk. A növekedés miatt a jegyeknek különbözőeknek kell lenniük. Számoljuk meg, hogy hány olyan háromjegyű szám van, aminek a jegyei különbözőek, de nem feltétlenül növekedők. Az első jegy 9-féle, a második 8-féle, ami után a harmadik 7-féle lehet. Mivel bármely első jegy választása esetén lehetséges a maradék 8 jegy stb., így a lehetőségek összeszorzódnak, vagyis $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ ilyen szám létezik. Ha kiválasztunk 3 különböző számjegyet (például 6,4,8), akkor ezeket $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképpen rakhatjuk sorba (468, 486, 648, 684, 846, 864), de ezek közül csak 1 esetben lesz a sorrendjük növekedő. Azaz az 504 számnál minden jó esetet 6-szor számoltunk, a végeredmény $\frac{504}{6} = 84$.

Csökkenő sorrend: Most mind a 10 számjegyet használhatjuk, és az előző eset mintájára most $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$ lehetőség van.

Megjegyzés. Az első, majd a második jegy lehetséges értékeit megvizsgálva is megkaphatjuk a megoldást. Például 3-mal kezdődő növekedő háromjegyű szám 15 van, mert a második jegy lehet 4, 5, 6, 7, 8. A 4-et az 5, 6, 7, 8, 9 követheti, ami 5 lehetőség. Hasonlóan az 5-öt 4, a 6-ot 3, a 7-et 2, a 8-at 1 féleképpen folytathatjuk. Ez összesen $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ lehetőség.



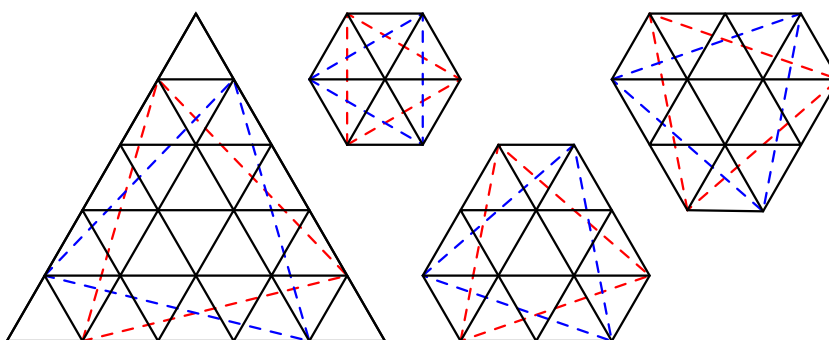
2. Hány olyan 4-jegyű, tízes számrendszerbeli szám van, amely nem változik, ha felcseréljük az egyesek és az ezresek helyén álló számjegyét?

Az egyesek és ezresek helyén álló számjegynek meg kell egyeznie. Elöl nem állhat 0, ezért itt 9-féleképpen választhatunk. Vegyük észre, hogy a százask és a tízesek helyére bármit tehetünk a 10 számjegy közül. Ezek szerint $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ a megoldás. ↑

3. Leírjuk egymás mellé sorra 1-től kezdve a pozitív egész számokat: 123456789101112... Melyik számjegy áll ebben a sorban a 2012-edik helyen?

Az egyjegyűek leírásához 9 számjegy kell. 90 darab kétjegyű szám van, ezek leírásához 180 számjegy kell. Ez eddig 189 számjegy. Hiányzik még $2012 - 189 = 1823$ számjegy. Ezek mind egy-egy háromjegyű szám számjegyei lesznek. Az 1823 harmada 607 és marad még 2. A 607-edik háromjegyű szám $99 + 607 = 706$. Tehát a következő szám középső jegyét kellett megkeresnünk. Ez a 707 második jegye, azaz 0. ↑

4. Egy 5 cm oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 1 cm oldalú kis szabályos háromszögekre bontottunk. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek csúcsai az így kapott háló rácspontjai közül kerülnek ki?



Az oldalak hossza szerint számoljuk le a háromszögeket.

1 cm oldalúból van 25.

2 cm oldalúból $10 + 3 = 13$ (3 „fejfel” lefelé).

3 cm oldalúból 6.

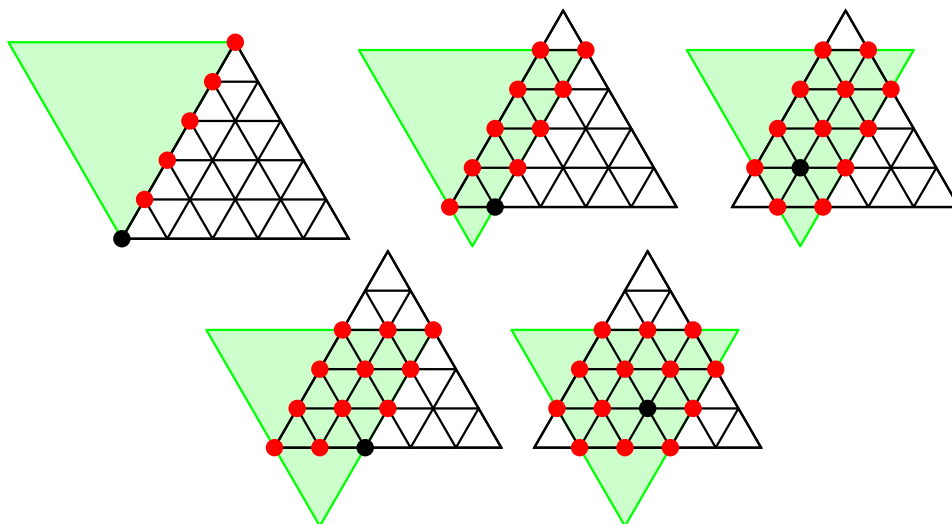
4 cm oldalúból 3 darab és 5 cm oldalúból 1.

A továbbiakban csak a rácspontokra figyelünk, nem foglalkozunk az őket összekötő szakaszokkal. Keressünk az ábrán olyan hatszögeket, amelyeknek másodsomszédos csúcsait összekötve szintén szabályos háromszöget kapunk. Egységnyi oldalú szabályos hatszög $1 + 2 + 3 = 6$ darab van, mindegyikbe 2-2 különböző szabályos háromszöget írhatunk. Ez újabb 12 db háromszög. Található olyan hatszög is, amelynek oldalai 1,2,1,2,1,2 egységnyiek. Ezekből $1 + 2 + 1 = 4$ db van (1 „fejfel” lefelé), tehát 8 újabb háromszöget találtunk. Van még egy 1,3,1,3,1,3 oldalú hatszög is, ebbe újabb 2 szabályos háromszöget lehet rajzolni. Ez összesen $25 + 13 + 6 + 3 + 1 + 12 + 8 + 2 = 70$ szabályos háromszög.

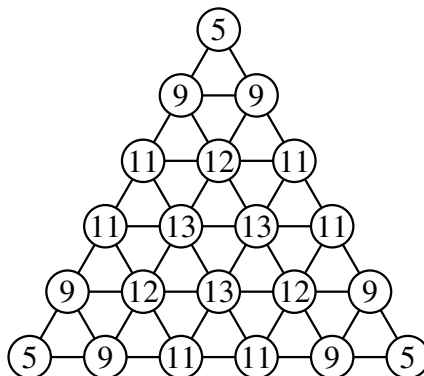
A versenyen nem volt elvárás az utolsó 22 háromszög megtalálása.

Második megoldás: A hálónak vegyük egy rácspontját (fekete pontokkal jelöltük az ábrán). Hány olyan szabályos rácsháromszög van, aminek ez a csúcsa? Ha egy ilyen szabályos háromszöget elforgatunk 60° fokkal, akkor az egyik csúcsa átfordul a másikba. Az egész háló 60° fokos

elforgatottjának (zöld az ábrákon) és az eredeti hálónak a metszésrácsponthai (piros pontok az ábrákon) száma pont megadja a keresett szabályos háromszögek számát.



Ezt kell összeszámolnunk a háló minden rácspontjára. A következő ábrán a rácspontokba írt számok mutatják, hogy hány szabályos háromszögnek csúcsa az a rácspont. (Gondoljuk meg, hogy a szimmetria miatt az előbbi öt ábra elég ehhez!)



Az ábrán látható számok összege pont a keresett szabályos háromszögek számának háromszorosát adja, mivel minden háromszöget minden csúcsánál megszámoltunk. Tehát a megoldás $\frac{3 \cdot 5 + 6 \cdot 9 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 13}{3} = 70$.



Országos döntő

1. Két pozitív egész szám különbsége 2012. Ha a nagyobbik szám végéről elhagyjuk a 0 számjegyet, akkor az így kapott számnak a 6-szorosa a kisebbik szám. Melyik ez a két szám?

Legyen a két keresett szám x és y , ahol $x > y$. Ha egy szám végéről elhagyjuk a 0 számjegyet, akkor a szám a tizedére csökken. Ebből következik, hogy y éppen az $x \cdot \frac{3}{5}$ -e, hiszen a tizedének a 6-szorosa. Ha viszont egy számból kivonjuk a $\frac{3}{5}$ -ét, akkor marad a $\frac{2}{5}$ -e. Vagyis tudjuk, hogy $x \cdot \frac{2}{5}$ -e éppen 2012. Ebből következik, hogy $x = 5030$, míg $y = 3018$.



2. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható 7-tel, de 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztva mindig 1 maradékot ad?

Ha az n szám 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztva is 1 maradékot ad, akkor az azt jelenti, hogy $n - 1$ osztható ezekkel a számokkal. Vagyis $n - 1$ osztható 60-nal. Keressük tehát a $60k + 1$ alakú számok között a legkisebb olyat, ami 7-tel osztható. $k = 5$ esetben kapunk először 7-tel osztható számot, vagyis a válasz 301. 

3. Adjunk meg 4 különböző pozitív egész számot úgy, hogy ha ezeket páronként összeadjuk, akkor a kapott számok hat egymást követő pozitív egész számot alkotnak.

Legyen a 4 szám: $a < b < c < d$. Ekkor $a + b$ a legkisebb a 6 szám közül és $a + c$ a második legkisebb. Mivel a második 1-gyel nagyobb az elsőnél, ezért c 1-gyel nagyobb b -nél. Hasonlóan $c + d$ a legnagyobb és $b + d$ a második legnagyobb. Így c 1-gyel nagyobb b -nél. Azt is tudjuk, hogy $c + d$ 5-tel nagyobb $a + b$ -nél. Tehát $c + d = b + d + 1$ és $c + d = a + b + 5$. Ebből következik, hogy $d = a + 4$. Vagyis azt tudjuk, hogy $a < b < b + 1 < a + 4$. Mivel ezek egész számok, ezért két lehetőség maradt: 1) $b = a + 1$, illetve 2) $b = a + 2$. Az első esetben a számok: $a, a + 1, a + 2, a + 4$, amikből a képzett 6 szám: $2a + 1, 2a + 2, 2a + 3, 2a + 4, 2a + 5, 2a + 6$, vagyis tetszőleges a esetén 6 egymást követő egész szám. A második esetben a számok: $a, a + 2, a + 3, a + 4$, amikből a képzett 6 szám: $2a + 2, 2a + 3, 2a + 4, 2a + 5, 2a + 6, 2a + 7$, amely szintén tetszőleges a egész esetén 6 egymást követő egész szám. Tehát pl. az 1, 2, 3, 5 számok megfelelnek a feltételnek. 

4. Az 5×5 -ös sakktábla minden mezőjére egy-egy „bogarat” teszünk. Adott idő alatt minden bogár átmászik valamelyik élszomszédos mezőre. Előfordulhat-e, hogy ekkor is minden mezőn lesz bogár?

Nem, ez nem fordulhat elő. Egy ilyen sakktáblán 13 fekete és 12 fehér mező van. Viszont ha egy bogár fehér mezőn van, akkor egy fekete mezőre kell átmásznia és fordítva, hiszen minden élszomszédos mező ellentétes színű. Vagyis a 13 fekete mezőn lévő bogár mindegyike fehér mezőre mászik át, de fehér mezőből csak 12 van, így biztosan lesz olyan fehér mező, amire legalább 2 bogár mászott át. Ekkor viszont lesz olyan mező is, ami üresen marad. 

Országos döntő

1. Melyik nagyobb: 2^{300} vagy 3^{200} ?

Tudjuk, hogy $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$. Másrészt $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$. Mivel a kitevők így már megegyeznek, de $8 < 9$, így $2^{300} < 3^{200}$. 

2. Számítsuk ki minél egyszerűbben a következő összeget:

$$\frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \frac{1}{4 \cdot 15} + \frac{1}{5 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{31 \cdot 96}$$

Emeljünk ki $\frac{1}{3}$ -ot, ekkor az összeg ilyen alakú lesz:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{31 \cdot 32} \right).$$

A további átalakításhoz segít a következő ötlet: $\frac{1}{a \cdot (a+1)} = \frac{(a+1)-a}{a \cdot (a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$. Ezt felhasználva az összeg:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{30} - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{32} \right).$$

Ez viszont jól látható módon az $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right)$ kifejezésre egyszerűsödik a műveletek elvégzése után.

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{32} = \frac{5}{32}.$$



3. Egy futóversenyen két csapat indult, mindegyik csapat 7 versenyzővel. Mindenki annyi pontot kapott 1 és 14 pont között, ahányadik helyen végzett (holtverseny nem volt). A végén összeadták a csapattagok pontjait, ez lett a csapatverseny eredménye. Tehát az a csapat győzött, amelyiknek kevesebb pontja lett. Hányféle pontszámot érhetett el a győztes csapat?

A legkevesebb pontot úgy érheti el egy csapat, ha a tagjai végeznek az első 7 helyen. Ekkor $1 + 2 + \dots + 7 = 28$ pontja van a csapatnak, ennél tehát nem lehet kevesebb. A versenyzők összesen 105 pontot szereznek, hiszen $1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 105$. Ha egy csapat nyert, akkor kevesebb pontja van, mint a másiknak, így a győztes csapatnak legfeljebb 52 pontja lehet.

Még meg kell mutatnunk, hogy ezek és a közbülső értékek is lehetségesek. A 28-ról már láttuk. Ebből kiindulva és a 7-et rendre 8-ra, 9-re, ..., 14-re cserélve 35-ig megkapjuk az összes egészt. Mivel $2 + 3 + 4 + \dots + 7 = 27$, így rendre 9, 10, ..., 14-et hozzáadva megkapjuk a 36, 37, ..., 41 összegeket. $3 + 4 + 5 + \dots + 8 = 33$, ehhez hetedikként rendre 9, ..., 14-et adva megkapjuk a 42, ..., 47 összegeket. $1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 13 + 14 = 48$. $4 + 5 + 6 + \dots + 9 = 39$, ehhez rendre 10, 11, 12, 13-at adva megkapjuk a hiányzó 49, 50, 51, 52 összegeket.



4. Hány olyan 3, 4 és 5 hosszúságú sorozat van, amelynek minden tagja a 0 vagy az 1 számjegy, és nincs benne két szomszédos 1?

A megoldást a lehetőségek felsorolásával végezhetjük el. Rendezzük a sorozatokat először a hosszuk, majd pedig a benne szereplő 1-esek száma szerint: 3 hosszúságú sorozatok: 000, 100, 010, 001, 101.

4 hosszúságú sorozatok: 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1010, 1001, 0101.

5 hosszúságú sorozatok: 00000, 10000, 01000, 00100, 00010, 00001, 10100, 10010, 10001, 01010, 01001, 00101, 10101. Tehát 3 hosszúságúból 5, 4 hosszúságúból 8, 5 hosszúságúból pedig 13 darab van, ami összesen 26 darab megfelelő sorozat. (Feltűnő lehet, hogy az 5, 8, 13 három egymást követő Fibonacci-szám. Általában igaz az, hogy adott hosszúságú megfelelő sorozatok száma minden esetben egy Fibonacci-szám.)



Országos döntő

1. Számítsuk ki a következő 13 tört összegét:

$$\frac{11}{13} + \frac{1111}{1313} + \frac{111111}{131313} + \dots + \frac{11 \dots 11}{13 \dots 13}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1111}{1313} = \frac{11 \cdot 101}{13 \cdot 101} = \frac{11}{13}$, vagyis 101-gyel lehet egyszerűsíteni. A következő törtnél 10101-gyel és így tovább. Látható, hogy 13 darab $\frac{11}{13}$ -ot kapunk, tehát az eredmény ennek a 13-szorosa, azaz 11. 

2. Tíz különböző pozitív egész szám összege 62. Igazoljuk, hogy a számok szorzata osztható 60-nal.

$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. A 3, 4 és 5 páronként relatív prímek, azaz legkisebb közös többszörösük a 60, így elég belátni, hogy a kérdéses szorzat osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel. Megmutatjuk, hogy az adott 10 pozitív egész között van 3-mal, van 4-gyel és van 5-tel osztható.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük föl, hogy nincs 3-mal osztható közöttük. Ekkor vegyük a 10 legkisebb ilyen tulajdonságú szám összegét: $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + 14 = 75 > 62$. A kérdéses 10 szám összege legalább ekkora, ez ellentmondás. Tehát van 3-mal osztható a számok között.

Ha nincs közöttük 4-gyel osztható, akkor az összeg legalább $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 + 13 = 67 > 62$, ami szintén ellentmondást ad.

Ha nincs közöttük 5-tel osztható, akkor az összeg legalább $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 12 = 63 > 62$, és így ismét ellentmondáshoz jutunk.

Beláttuk, hogy a számok között van 3-mal, van 4-gyel és van 5-tel osztható is, így a kérdéses szorzat osztható a 60-nal. 

3. Az a , b és c számjegyeket jelöl. Van-e négyzetszám az $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok között?

Vegyük észre, hogy $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. Az 1001 prímtenyezős alakja $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ha lenne az ilyen alakú számok között négyzetszám, akkor $\overline{abc}$ osztható lenne 7-tel, 11-gyel, 13-mal, hiszen $7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot A^2$ alakúnak kellene lennie $\overline{abcabc}$ -nek. A fentiek miatt ekkor $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \mid \overline{abc}$, ami nem lehet, mert $\overline{abc}$ háromjegyű. Tehát nincs ilyen négyzetszám. 

4. Melyek azok az n egész számok, amelyekre a $\frac{3n-6}{n+3}$ tört értéke egész szám?

Első megoldás: Alakítsuk át a számlálót: $\frac{3(n+3)-15}{n+3} = 3 - \frac{15}{n+3}$. Ez pontosan akkor lesz egész, ha $\frac{15}{n+3}$ is egész. Tehát az $n+3$ kell, hogy a 15-nek osztója legyen.

Ez a következő n értékek esetén teljesül: $-18, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 12$.

Második megoldás: Tegyük fel, hogy $\frac{3n-6}{n+3}$ egész, értéke legyen A . Ekkor $3n - 6 = A(n + 3)$. Rendezve

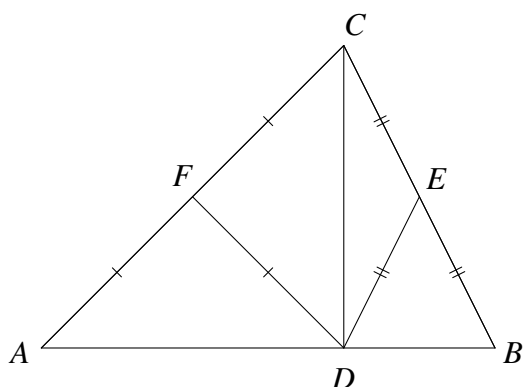
$$3n - 6 = An + 3A$$

$$An - 3n + 3A + 6 = 0.$$

Szorozattá alakítva: $(A - 3)(n + 3) = -15$. A megoldásokat lásd az előző megoldásnál. 

5. Egy tetszőleges háromszöget daraboljunk fel négy egyenlőszárú háromszögre.

Minden háromszögnek legalább egy magasságvonala belül van a háromszögön. Ez a legnagyobb szög csúcsából kiinduló magasságra biztosan igaz, ugyanis ha a magasság nincs belül, akkor a szemközti oldalon fekvő szögek egyike nem hegyesszög, de ekkor ez lenne a háromszög legnagyobb szöge, holott az az oldallal szemközt van. Húzzuk be ezt, a talppont legyen D . Majd a keletkezett két derékszögű háromszög átfogójának felezőpontját (E és F) kössük össze D -vel. A kapott háromszögek egyenlőszárúak.



Ez következik egyrészt a Thalész-tételből, mert eszerint az ADC és BDC derékszögek miatt D rajta van az E körüli, $EA = EC$ sugarú, valamint az F körüli, $FB = FC$ sugarú körön, vagyis $ED = EA = EC$, és $FD = FB = FC$.

Másrészt például F -re tükrözzük középpontosan az ACD derékszögű háromszöget. A D tükörképe legyen D' . Az A képe C , a C képe A . Így az ADC és $CD'A$ szögek is derékszögek. A CD és AD' egyenesek párhuzamosak, így a $D'AD$ szög egyenlő a CDA szöggel, vagyis derékszög.

Emiatt a $CDAD'$ négyszög negyedik szöge is derékszög, mert szögösszege 360° . Tehát ez egy téglalap. Ennek átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást, tehát egyenlőszárú háromszögeket kapunk (két-két oldaluk az átlók hosszának felével egyenlő). Hasonlóképpen járhatunk el a másik két háromszög esetén is.



Országos döntő

1. 13 különböző pozitív egész szám összege 92. Melyek ezek a számok?

A kérdéses 13 pozitív egész szám legyen $x_1 < x_2 < \dots < x_{13}$. Ezekre $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, és így tovább, $x_{13} \geq 13$. Így ezeket összeadva a kérdéses összeg legalább a 13 legkisebb pozitív egész szám összege, azaz $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$. Ennél 1-gyel kapunk nagyobbat a feladatban szereplő esetben, így az előbbi 13 egyenlőtlenség közül pontosan az egyiknél nem áll egyenlőség. De ha a $x_k > k$, akkor a $x_{k+1} > k+1$, így nem csak egy helyen állna szigorú egyenlőtlenség, kivéve ha $k = 13$. Tehát pontosan az utolsó egyenlőtlenségnél van szigorú egyenlőtlenség, és itt $x_{13} = 13 + 1 = 14$.

Így a keresett számok az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14.



2. Egy régi feladat: „Egy gazdag ember elment a vásárba és vett kecskéket, birkákat és malacokat. A kecskék darabjáért 2 aranyat, a birkák darabjáért 4 aranyat, a malacok darabjáért 5 aranyat fizetett, így összesen 54 aranyat adott ki az állatokért. 22 állatot vitt haza a vásárból. Hányat vitt haza az egyes állatfajtákból?”

Legyen x kecske, y birka, z malac. Fölírhatjuk a szöveg alapján a következő két egyenletet:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 22 \\ 2x + 4y + 5z &= 54. \end{aligned}$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 2-vel:

$$2x + 2y + 2z = 44.$$

Vonjuk ki ezt a második egyenletből:

$$2y + 3z = 10.$$

Itt $y, z > 0$ miatt $1 \leq y \leq 4$, $1 \leq z \leq 3$. Az eseteket végignézve csak az $y = 2, z = 2$ megoldás, innen pedig $x = 18$.

Ez valóban jó megoldás, hiszen az eredeti egyenletekbe visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned}2 + 2 + 18 &= 22 \\2 \cdot 18 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 &= 54.\end{aligned}$$

Tehát 18 kecskét, 2 birkát és 2 malacot vitt haza. 

3. Az a és b számjegyekről tudjuk, hogy $a \cdot b = a + b + 1$. Melyek lehetnek a $10a + b$ alakú kétjegyű számok?

Rendezzük át az adott egyenletet:

$$a \cdot b - a - b = 1.$$

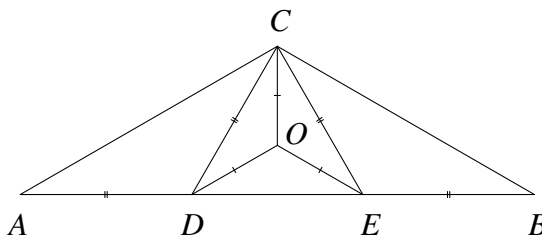
Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd alakítsunk szorzattá:

$$(a - 1)(b - 1) = 2.$$

A bal oldal egész számok szorzata, és $a \geq 1$, így $a - 1 \geq 0$, tehát vagy $a - 1 = 1$, $b - 1 = 2$, vagy $a - 1 = 2$, $b - 1 = 1$. Ez alapján a keresett számok a 23 és a 32 (ezek valóban jók is). 

4. Adott egy 120° -os szárszögű egyenlőszárú háromszög. Daraboljuk fel 5 egyenlőszárú háromszögre.

Bontsuk fel a 120° -os szöget négy 30° -os szögre. Használjuk fel, hogy a szabályos háromszög körülírt körének középpontját a csúcsokkal összekötve három darab egyenlőszárú háromszöget kapunk, hiszen ez a pont (O) mindhárom csúctól (C, D, E) egyenlő távolságra van. Mivel az eredeti háromszög alapon fekvő szögei 30° -osak, ezért a CAD és a CEB háromszögek is egyenlőszárúak. 



Országos döntő

1. Melyek azok az n egész számok, amelyekre az $\frac{n^2+5n+10}{n+3}$ tört értéke is egész szám?

Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{n^2 + 5n + 10}{n + 3} = \frac{(n + 2)(n + 3) + 4}{n + 3} = n + 2 + \frac{4}{n + 3}.$$

Ez pontosan akkor lesz egész, ha $n + 3$ osztója 4-nek. A 4 osztói: 4, 2, 1, -1, -2, -4, amiből n lehetséges értékei: 1, -1, -2, -4, -5, -7. 

2. Lehet-e 2^{100} legalább két egymást követő pozitív egész szám összege?

Nem lehet. Felhasználjuk, hogy 2^{101} osztói mind 2 hatványok, beleértve az $1 = 2^0$ -t is, tehát páratlan osztója csak az 1. Indirekten bizonyítunk: Tegyük fel, hogy

$$(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \dots + (n + k) = 2^{100},$$

és $k \geq 2$. A bal oldalt összegezve: $n \cdot k + \frac{k(k+1)}{2} = 2^{100}$. Szorozzunk végig 2-vel:

$$2 \cdot n \cdot k + k(k+1) = 2^{101}.$$

A bal oldalon kiemelhetjük k -t: $k(2n + k + 1) = 2^{101}$. Értelmezzük az utóbbi egyenlőséget! Ha k páratlan, akkor csak 1 lehet, de $k \geq 2$. Ha k páros, $2n + k + 1 > 1$ páratlan, de 2^{101} -nek ilyen osztója nincs. Ezzel ellentmondásra jutottunk. 

3. Egy szabályos dobókockát háromszor feldobunk. Hányféle eredményt kaphatunk, ha csak az számít, hogy hány 1-est, 2-est, 3-ast, 4-est, 5-öst, 6-ost dobtunk?

Első megoldás: A lehetőségeket megadhatjuk felsorolással. A dobott értékeket rakjuk nem csökkenő sorozatba. Ha két 1-est dobtunk, akkor a harmadik dobás hatféle lehet, (1,1,1); (1,1,2); (1,1,3); (1,1,4); (1,1,5); (1,1,6). Ez 6 lehetőség. Ha az 1-es után 2-est dobtunk, akkor (1,2,2); (1,2,3); (1,2,4); (1,2,5); (1,2,6). Ez 5 lehetőség. Ha az 1-es után 3-ast dobtunk, akkor (1,3,3); (1,3,4); (1,3,5); (1,3,6). Ez 4 lehetőség. Ha az 1-es után 4-est dobtunk, akkor (1,4,4); (1,4,5); (1,4,6). Ez 3 lehetőség. Ha az 1-es után 5-öst dobtunk, akkor (1,5,5); (1,5,6). Ez 2 lehetőség. Ha az 1-es után 6-ost dobtunk, akkor (1,6,6). Ez 1 lehetőség. Ez összesen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ lehetőség. Hasonlóan adódik a 2-essel is. (2,2,2); (2,2,3); (2,2,4); (2,2,5); (2,2,6). Ez 5 lehetőség. Ha a 2-es után 3-ast dobtunk, akkor (2,3,3); (2,3,4); (2,3,5); (2,3,6). Ez 4 lehetőség. Ha a 2-es után 4-est dobtunk, akkor (2,4,4); (2,4,5); (2,4,6). Ez 3 lehetőség. Ha a 2-es után 5-öst dobtunk, akkor (2,5,5); (2,5,6). Ez 2 lehetőség. Ha a 2-es után 6-ost dobtunk, akkor (2,6,6). Ez 1 lehetőség. Ez összesen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ lehetőség. Analóg módon adódik, hogy 3-assal kezdve $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, 4-essel kezdve $1 + 2 + 3 = 6$, 5-össel kezdve $1 + 2 = 3$, ha mind hatos, akkor az 1 lehetőség. A fenti háromszög számokat összegezve: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$.

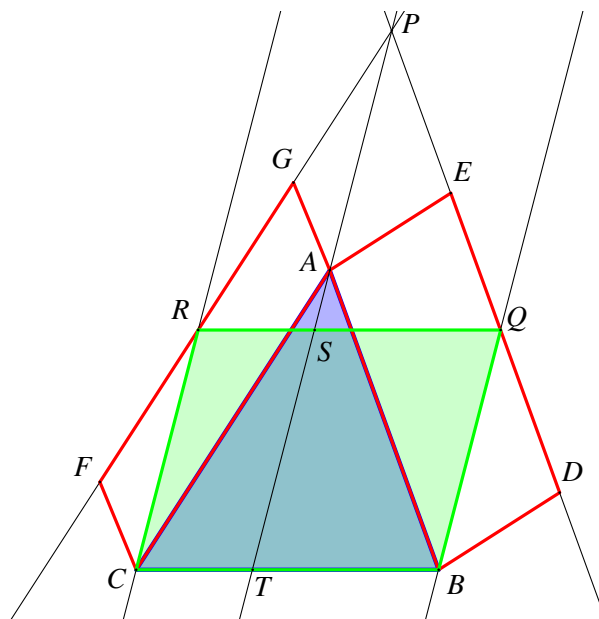
Második megoldás: Írjunk le 5 db 0-t, és minden dobás után írjunk az n -edik 0 elé egy 1-est, ha a dobás eredménye $n = 1, \dots, 5$, és egyet az ötödik 0 után, ha 6-ot. Így kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést tudunk létrehozni a dobások eredménye és az olyan 8 hosszú 0-1 sorozatok között, melyekben 3 db 1-es szerepel. Tehát elég az ilyen sorozatokat megszámlalnunk. Minden ilyen sorozatot megkapunk úgy, hogy leírunk 8 db 0-t, majd 3-ra rámutatunk, és ezeket 1-re változtatjuk. Először 8 db 0 közül választhatunk, másodsorra 7 közül, végül a maradék 6 közül, de az mindegy, hogy milyen sorrendben választjuk az egyes 0-kat, amiket átírunk, ezért összesen $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ ilyen sorozat van. 

4. Az ABC háromszög AB és AC oldalára (kifelé) megszerkesztjük az $ABDE$ és $ACFG$ paralelogrammákat. A DE és FG egyenesek a P pontban metszik egymást. A B , illetve C ponton át az AP egyenessel párhuzamosokat húzunk, ezek a DE , illetve FG egyeneseket a Q , illetve R pontban metszik. Igazoljuk, hogy $BCRQ$ paralelogramma, és ennek területe egyenlő az $ABDE$ és $ACFG$ paralelogrammák területének összegével.

A feladat feltételeiből következik, hogy $AC \parallel PR$ és $AP \parallel CR$, azaz $ACRP$ paralelogramma. Hasonlóan látható, hogy $ABQP$ is paralelogramma. Ezekből következik, hogy az RC és a PA , illetve a PA és a QB szakaszok páronként párhuzamosak és egyenlő hosszúak, tehát a $BCRQ$ négyszögben az RC és QB szemkötti oldalak párhuzamosak és egyenlő hosszúak, azaz a $BCRQ$ paralelogramma.

Jelöljük az AP egyenesnek a QR , illetve BC szakaszokkal való metszéspontját rendre S -sel, illetve T -vel. Az $STCR$ és $QBTS$ négyszögek paralelogrammák (szemközti oldalaik párhuzamossága miatt) és területük összege a $BCRQ$ paralelogramma területével egyenlő.

$T_{ABDE} = T_{ABQP}$, mert mindkét paralelogramma alapja az AB szakasz és a magassága az AB és ED párhuzamos egyenesek távolsága. Hasonlóan igazolhatók a következők is: $T_{ACFG} = T_{ACRP}$, $T_{ABQP} = T_{BTSQ}$, és $T_{ACRP} = T_{TCRS}$. Ebből a négy egyenlőségből adódik, hogy $T_{ABDE} + T_{ACFG} = T_{BTSQ} + T_{TCRS} = T_{BCRQ}$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.



5. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet: $a \cdot b + 2a + 3b = 36$.

Első megoldás: Próbáljuk meg szorzattá alakítani a baloldalt, de előbb adjunk mindkét oldalhoz 6-ot. Ekkor $(a + 3) \cdot (b + 2) = 42$. A baloldal két pozitív egész szorzata, ezért a jobboldalt is így bontjuk fel. A megoldásokat, vagyis a -t és b -t, a pozitív egészek halmazában kell keresnünk, ezért csak a következők jönnek szóba: $42 = 14 \cdot 3 = 7 \cdot 6 = 6 \cdot 7$. Tehát a megoldások: $(a = 11, b = 1)$, $(a = 4, b = 4)$, $(a = 3, b = 5)$.

Második megoldás: Emeljük ki a -t: $a \cdot (b + 2) = 36 - 3b$. Tovább alakíthatunk: $a = \frac{36-3b}{b+2} = \frac{36-3(b+2)+6}{b+2} = \frac{42-3(b+2)}{b+2}$. Ez utóbbit szétbontjuk két tört különbségére: $\frac{42-3(b+2)}{b+2} = \frac{42}{b+2} - 3$. Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy $b + 2$ milyen pozitív egészek mellett lesz a 42 osztója. Innentől lásd az 1. megoldást.



Országos döntő

1. Igazoljuk, hogy 121, 10201, 1002001 teljes négyzet (négyzetszám). Általánosítsunk!

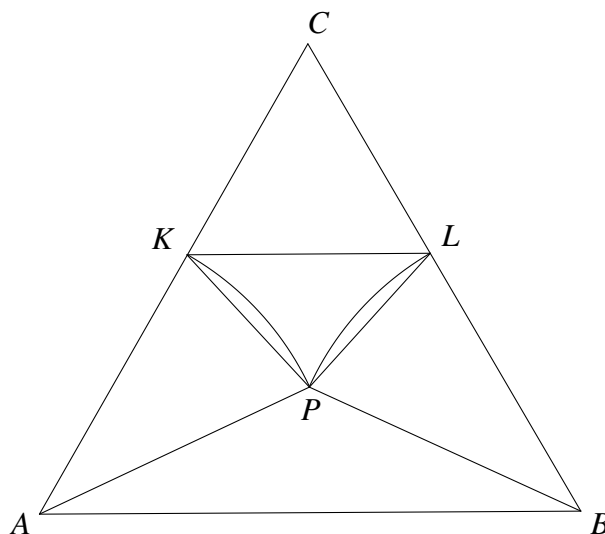
Az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ azonosság ismeretében észrevehetjük, hogy $121 = 11^2 = (10 + 1)^2$, $10201 = 101^2 = (100 + 1)^2$, és $1002001 = 1001^2 = (1000 + 1)^2 = (10^3 + 1)^2$. Ezt általánosítva a következőt kapjuk:

$$\underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ db}} \underbrace{200 \dots 0}_{n \text{ db}} = 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1 = (10^n + 1)^2$$

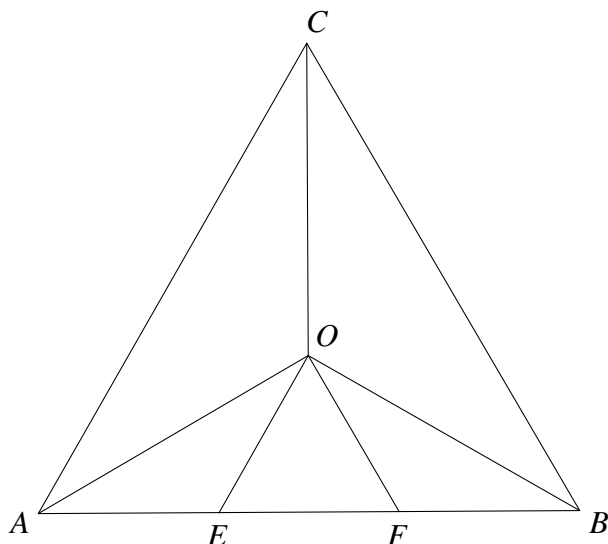


2. Szabályos háromszöget daraboljunk fel 5 egyenlőszárú háromszögre.

Első megoldás: Az ABC szabályos háromszög oldala legyen a hosszú. A és B csúcsa körül rajzoljunk egy-egy $\frac{a}{2}$ -nél nagyobb és a -nál kisebb sugarú körívet. Ez biztosítja, hogy a megfelelő metszéspontok létezzenek. A körívek háromszögbe eső metszéspontja legyen P . A körívek messék AC -t K -ban, BC -t L -ben. A keresett háromszögek APK , BLP , ABP , KLP , CKL . A szerkesztési eljárás igazolja a megoldás helyességét, mert AP , AK , BP , és BL hossza is a kör sugarával egyenlő, ez igazolja, hogy az APK , BLP , ABP háromszögek egyenlőszárúak. A KLP és CKL háromszögek az ábra tengelyes szimmetriája miatt egyenlőszárúak.



Második megoldás: Az ABC szabályos háromszög beírt körének középpontját (O) kössük össze a csúcsokkal, majd az egyik oldalon vegyük fel az E, F pontokat úgy, hogy $\angle AOE = \angle BOF = 30^\circ$ teljesüljön. Az OA , OB , OC szakaszok a szabályos háromszög szögfelezői, ezért az AOC , COB , AOE , BOF háromszögek mindegyike egyenlőszárú háromszög 30° , 30° , 120° -os szögekkel. Tengelyes szimmetria miatt $OE = OF$, ezért ez a háromszög is egyenlőszárú. Az OEF háromszög valójában egyenlő oldalú, mert minden szöge 60° , így $AE = OE = EF = FO = FB$, tehát azt is megkaptuk, hogy E, F valójában az AB oldal harmadolópontjai. 



3. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben a számjegyek (balról jobbra) nem csökkenő sorrendben követik egymást?

A megoldások nagy száma miatt azokat nehézkes megadni felsorolással. A probléma a következőképpen modellezhető: a nem csökkenő sorrend azt jelenti, hogy balról jobbra haladva a következő számjegy nagyobb vagy egyenlő az előzőnél. Összesen 9 darab lehetséges számjegy van, hiszen 0-val nem kezdődhet szám. A következőképpen hozhatunk létre kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a megfelelő számok és azon 12 hosszú 0-1 sorozatok között, amelyek pontosan 4 darab 1-est tartalmaznak: írjunk le 8 darab 0-t, melyek a 9 lehetséges számjegyet elválasztják egymástól. Az első 0 elé írjunk annyi darab 1-est, ahány 1-es van a számban (csak az elején lehetnek), az első és második 0 közé írjunk annyi darab 1-est, ahány 2-es van a számban és így tovább, az utolsó 0 után annyi darab 1-est írjunk, ahány 9-es van a számban. A nem csökkenő sorrend miatt ha megvan, hogy milyen számokat használunk, azokat csak egyféleképpen rendezhetjük sorba, ezért különböző számokhoz különböző sorozat tartozik. Minden sorozatot megkapunk valamilyen számból, mert az egyeseknek megfelelő számokat sorban leírva éppen jó számot kapunk. Tehát ugyanannyi jó szám van, mint ahány ilyen tulajdonságú sorozat. A sorozat tehát 12 számból áll,

amiben pontosan négy 1-es és nyolc 0 van. Az első 1-est 12 helyre tehetjük, a másodikat 11-re, a harmadikat 10-re, a negyediket 9-re, ez összesen $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$, de ezt el kell osztani $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ -gyel, ahányféleképpen négy különböző egyest sorba rendezhetünk, mert most az egyesek sorrendje nem számít. (Ezt nevezik ismétléses permutációnak). Tehát a megoldás $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$. 

4. Igazoljuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 7 \geq 2,$$

ha x, y tetszőleges valós számok!

Képezzünk a baloldalon teljes négyzeteket, mert ezekről tudjuk, hogy mindig nemnegatívak.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 7 &= x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 7 = \\ &= (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

Mindkét oldalból 2-t kivonva kapjuk, hogy $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$, ami igaz, mert két négyzetszám összege biztosan nagyobb 0-nál. A kapott egyenlőtlenség egyenértékű az eredetivel, ezért az is igaz. Még azt is megállapíthatjuk, hogy egyenlőség csak akkor teljesül, ha mindkét tag 0, azaz $x = -1$ és $y = 2$. 

XLII. VERSENY 2012–13.

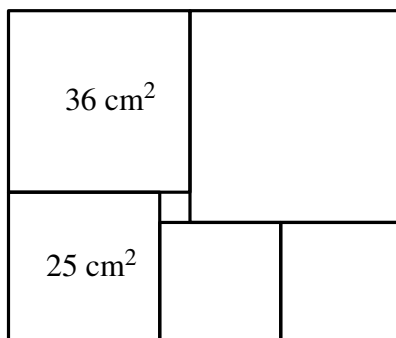
FELADATOK

Megyei forduló

1. Okos Kata most kezdte megismerni a Word szövegszerkesztőjét. Nagyon lelkes volt, s egyből elhatározta, hogy 3-tól 2013-ig minden természetes számot beír egy fájlba. A számokat folytonosan írta egymás után, sem vesszővel, sem szóközzel nem választotta el azokat. Hány számjegyet kellett leírnia? 
2. Állítsd elő a 165-öt egymást követő pozitív egész számok összegeként! Gyűjts minél több megoldást! 
3. Három gyerek megegyezett abban, hogy a vesztes minden játék után a saját csokoládéjából megkétszerezi a többiek csokoládéját. Összesen három játszmát játszottak. Mindenki egyszer veszített. A játék végén mindenkinek 32 darab csokoládéja volt. Hány darab csokoládéja volt a játszma elején annak, akinek a legtöbbje volt? 
4. A mellékelt szorzásban írd az x -ek helyére számjegyeket úgy, hogy helyes legyen a műveletvégzés! Hány megoldása van a feladatnak? (Az x -ek értelemszerűen most csak a hiányzó számjegyek helyét jelölik!) 

		7	x	7	$\cdot$	x	7
	x	x	7	x			
+		x	x	7	x		
	x	x	x	x	x		

5. Az $ABCD$ téglalapot 6 négyzetre bontottuk fel. Közülük kettő területét beírtuk az ábrába. Hány cm az $ABCD$ téglalap kerülete? 



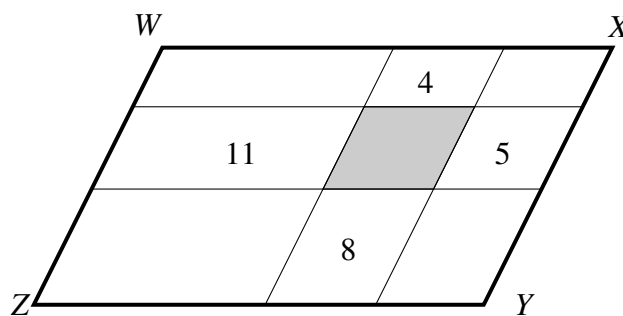
Megyei forduló

1. Keresd meg mindazon tízes számrendszerben felírt természetes számokat, amelyek számjegyeik összegének 13-szorosával egyenlők! ➡
2. Egy falu határában gabonaföldet, gyümölcsöst, zöldségkertészetet, halastavat és legelőt alakítottak ki az évek során. A földterületek nagyságáról csak annyit tudunk, hogy hektárban mérve mindegyik egész szám volt. Az első négy terület nagysága a falu határának $\frac{15}{81}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{24}{80}$ része volt. A többi területet meghagyták legelőnek. Legkevesebb hány hektár lehetett a legelő területe? ➡
3. Hány olyan különbözőnek tekinthető téglatest van, amelynek a térfogata 2013 cm^3 és oldalai egész számok? ➡
4. A 13, 17, 37, 79 prímszámokból szintén prímszámokat kapunk, ha számjegyeiket felcseréljük. Létezik-e olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű prímszám, amelynek számjegyeit tetszőlegesen felcserélve szintén prímszámokat kapunk? ➡
5. Mindegyik háromjegyű természetes számot elosztottuk a saját számjegyei összegével. Mekkora volt a legnagyobb maradék? ➡

Megyei forduló

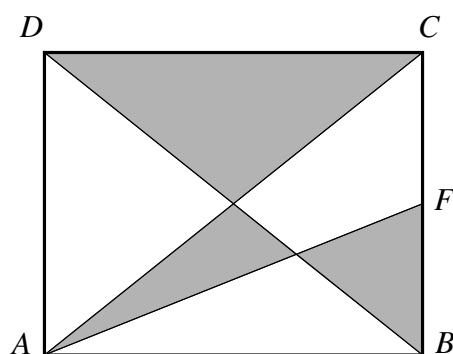
1. Valaki 2012-ben annyi éves volt, mint születési éve számjegyeinek összege. Mikor születhetett? ➡
2. Írd le az 1000-et
 - (a) 5 darab 9-es számjeggyel
 - (b) 6 darab 1-es számjeggyel
 - (c) 6 darab 5-ös számjeggyel
 - (d) 5 darab 3-as számjeggyel.

A leíráshoz mindenféle műveleti jelet és zárójeleket is használhatsz! ➡
3. A WXYZ paralelogrammában az oldalakkal párhuzamosan vettünk fel két-két szakaszt. Ezek a nagy paralelogrammát 9 kisebb paralelogrammára bontották. Közülük négy kerületét centiméterben mérve beírtuk. Tudjuk még, hogy a WXYZ paralelogramma kerülete 21 centiméter. Mekkora a satírozott paralelogramma kerülete? ➡
4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek felhasználásával készíts páronként különböző prímszámokat úgy, hogy minden számjegy pontosan kétszer szerepeljen az előállított prímekben és a kapott prímszámok összege a lehető legkisebb legyen! Keress több megfelelő előállítást! ➡
5. Kezdetben egy darab számunk van, maga az 1. Meglevő számainkat gyarapíthatjuk a következő művelet segítségével: egy meglevő számot növelhetünk a szám valahány pozitív egész százalékaival, ha így ismét egész számot kapunk. A százalékláb a gyarapítás során 1-től 100-ig bármelyik egész szám lehet, beleértve a határokat is, de ennél több nem. Mutasd meg, hogy 1-től 50-ig minden egész számot elő lehet állítani! (Egy példa: ha már előállítottad a 8-at valamilyen módszerrel, akkor ebből meg tudod csinálni a 12-t, ha hozzáadod a 8-hoz annak 50%-át a 4-et, $8+4=12$.) ➡



Megyei forduló

1. Legyen A egy 2013-ra végződő pozitív egész szám, B pedig az a pozitív egész szám, amelyet A utolsó négy jegyének törlésével kapunk. Tudjuk, hogy A egész számú többszöröse B -nek. Hány ilyen A szám van? 
2. Négy különböző pozitív számjegy felhasználásával elkészítettük az összes olyan négyjegyű számot, amelyben a számjegyek különbözők. Ezeknek a négyjegyű számoknak 186648 az összegük. Melyek lehettek a kiinduló számjegyek? 
3. Hány olyan háromszög van, amelynek $(x; y)$ csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben az $1 \leq x \leq 4$ és $1 \leq y \leq 4$ feltételnek eleget tevő egész koordinátájú pontok? 
4. Egy apa egy bizonyos összeget szétosztott a gyermekei között. A legidősebb 100 Ft-ot kapott és a maradék tized részét, a második 200 Ft-ot és az új maradék tized részét, a harmadik 300 Ft-ot és az új maradék tized részét és így tovább. A végén kiderült, hogy minden gyermek ugyanannyit kapott. Hány gyermek volt, és mennyit kapott egyik-egyik? 
5. Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontja F . Hányadrésze a sátrózott területek összege a téglalap területének? 



Országos döntő

1. Az iskolában lévő tanulói szekrényeket az 1-essel kezdődően egymás után sorszámozták műanyagból készült számjegyekkel. A számjegyek darabja 20 forint volt. Tehát a 9-es 20 forintba került, a 10-es pedig $20 \cdot 2 = 40$ -be. Az összes szekrény számozására 138900 forintot költöttünk. Mi volt az utolsó szekrény sorszáma? 
2. Gondolatban írjuk le a dátumokat év.hónap.nap formátumban. Pl. 1948.3.25. Nevezzük ezt a dátumot „vegyesnek”, mert minden jegye különböző. Hány nap telik el a XX. század utolsó „vegyes” dátumától a XXI. század első „vegyes” dátumáig? (Egyjegyű hónap és egyjegyű nap száma elé nem kell 0-át írni!) 
3. Egy ötletes rövidítést vezetünk be olyan számok leírására, amelyben sok egyforma számjegy áll egymás után: jelölje d_n a d számjegy n -szeres fellépését. Az n lehet $1, 2, 3, \dots$ Pl. $77755 = 7_3 5_2$, $11119999988333 = 1_4 9_5 8_2 3_3$, $5557755 = 5_3 7_2 5_2$. Ha ezen jelölés mellett

$$2_x 3_y 5_z + 3_z 5_x 2_y = 5_3 7_2 8_3 5_1 7_3.$$

akkor mivel egyenlő x , y és z ? 

4. Egy 82 cm hosszú és 40 cm széles téglalap alakú keménylap négy sarkából levágtunk egy-egy egybevágó négyzetet, a megmaradt papírból egy felül nyitott téglatest alakú dobozt készítettünk. Milyen magas volt a doboz, ha annak elkészítéséhez felhasznált papír 3136 cm^2 volt? 
5. A bűvös négyzetben minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban a számok összege ugyanannyi. Egy 3×3 -as méretű bűvös négyzetet hiányosan töltöttünk ki. Írd be a hiányzó számokat! Írd le a gondolatmenetedet is! 

40		28
13		
		10

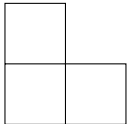
Országos döntő

- Állítsd elő a 100-at egymástól különböző módokon az 1, 2, 3, ..., 9 számjegyek segítségével, négy alpműveleti jelet és zárójelet használhatsz, de a számjegyek sorrendjét nem változtathatod meg! Ha két vagy több számjegy közé nem teszel semmilyen megengedett jelet, akkor azokat (balról kezdve) egy többjegyű számnak olvashatod!
 - $100 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$
 - $100 = 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$ 
- 300 darab 1 cm^3 -es kiskocka mindegyikét felhasználva különféle méretű tömör téglatesteket állítottunk össze. Hány olyan téglatest van, amelynek oldalhosszai egész számok és a térfogata 300 cm^3 ? Írd le a talált testek méreteit! 
- Igazold, hogy nem helyezhetünk el egy kocka csúcsaiban a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számok közül nyolc különbözőt úgy, hogy bármely él két végpontjában levő számok összege osztható legyen 2-vel.
 - Igazold, hogy elhelyezhetünk egy kocka csúcsaiban a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számok közül nyolc különbözőt úgy, hogy bármely él két végpontjában levő számok összege osztható legyen 3-mal. 
- Az ősszel almát szedtünk. A vödörbe és a kosárba gyűjtött almát beleborítottuk a ládába, majd tovább szedtük a kisebb edényekbe. Egy vödörben 36 kilogrammal kevesebb alma volt, mint egy ládában. A ládában pedig 12 kilogrammal több alma van a kosárban lévő alma kétszeresénél. A kosárban pedig 6 kilogrammal több alma van, mint a vödörben. Mennyi almát szedtünk, ha a szüret végén négy ládánk, három vödrünk és egy kosarunk volt tele? (A szövegben szereplő adatok mindig a tele edényekre vonatkoznak.) 
- Öt számkártyánk van $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$. Mindegyiken egy-egy nullánál nagyobb, de egymástól különböző számjegy áll. Az egyik számkártya fordítva került a képre, ezért nem látható, hogy melyik számjegy van rajta. Az öt számkártya felhasználásával egy kétjegyű és egy háromjegyű számot állítunk elő. Mennyi lehet a két legnagyobb különbségű szám különbségének és a két legkisebb különbségű szám különbségének a különbsége? 

Országos döntő

1. Egy 90 méter hosszú és 28,5 méter széles, téglalap alakú telken nyulakat és tyúkokat tenyészt egy gazda. Amikor egy látogató érkezett, megkérdezte, hogy hány nyúl és hány tyúk van a telepen. A gazda így válaszolt: „Az állatoknak összesen 2652 lábuk és annyi fejük van, mint a telek – m^2 -ben kifejezett – terület mérőszámának 2 ötöd része.” A látogató nem ismerte a terület nagyságát, így nem tudta megoldani a feladatot. Segítsünk neki! 
2. 1 cm élű kockákból $18 \times 18 \times 18$ -as méretű tömör kockát raktunk össze, majd a felszínét pirosra festettük. Legkevesebb hány pirosra színezett kiskockát kell elvenni a nagy kockából, hogy a megmaradó test felszíne 2014 legyen! Indokolj! 
3. A Kalmár döntőre egy iskolából 6 gyerek, valamint Alfa, Béta és Gamma tanár urak utaztak el. Számukra egy sorban 9 egymás melletti helyet tartottak fenn a rendezvény szervezői. A tanárok érkeztek elsőként, és elhatározták, hogy úgy fognak leülni, hogy mindhárman két diák között üljenek. Hányféle ülésrend képzelhető el? 
4. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel a nulla számjegy? 
5. Ha az 1234 négyjegyű számból minden lehetséges módon törölünk két számjegyet, majd az így megmaradt két számjegyet kétjegyű számként kiolvassuk, akkor a 12, 13, 14, 23, 24, 34 számokat kapjuk. Ezek összege 120. Keressetek olyan négyjegyű számot, amelynél ez az összeg a) 220 b) 540. (Vigyázz! Pl. az 1052-ben a 02 nem kétjegyű, hanem egyjegyű és értéke 2.) 

Országos döntő

- Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 9-cel és 25-tel, és mind a négy számjegye különböző? ➔
- Egy 8×8 -as sakktábla mezőire az ábrán látható módon írtuk be a számokat 1-től 64-ig. Helyezzétek a sakktábla mezőire ezt a három kis négyzetből álló alakzatot! Hány olyan elhelyezés lehetséges, amelyben a lefedett mezőkben lévő számok összege osztható 3-mal? A kis alakzatot tetszőlegesen forgathatod a sakktáblán! ➔


1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64
- Egy kocka 125 darab 1 cm^3 -es fehér és piros kiskockából áll. Köztük pontosan annyi fehérre festett van, amennyi szükséges ahhoz, hogy a nagykocka külsején a fehér és a piros négyzetlapok sakktáblaszerűen helyezkedjenek el. Hány fehérre festett kocka van a 125 között, ha a csúcsokba piros kockát helyeztünk el? ➔
- Egy egyenlőszárú háromszög oldalai rendre $(x + 89)$, $(7x + 41)$ és $(3x + 85)$ cm. Az x értékéről semmi információnk nincs. Hány cm a háromszög területének a lehető legnagyobb értéke? ➔
- Egy nagy papírlapra leírtuk az évszámokat egymás után István király megkoronázásának évétől a mostani évig (2013-ig, a 2013-at is beleértve). Mennyivel egyenlő a leírt évszámok számjegyeinek összege? (Istvánt 1001. január 1-jén koronázták meg.) ➔

Országos döntő

- 9 kg mogyorót vásároltunk, kilogrammonként 1800 forintért. A mogyoró megtisztítása után - lemérve a kapott mogyoróbelet és héjat - megállapítottuk, hogy a mogyoróhéj súlya a mogyoróbél súlyának 2 harmadrésze. Mennyibe kerül a mogyoróbél kilogrammjá? ➔
- 1-től 100-ig az egész számokat két színnel kiszíneztük: 74 számot pirosra, a maradék 26-ot kékre.
 - Bizonyítsd be, hogy a pirosak összege nem lehetett egyenlő a kékékek összegével!
 - Legfeljebb hány számot színezhettünk pirosra, ha a fenti két összeg megegyezett? ➔
- Keressétek meg az összes olyan csupa különböző számjegyből álló háromjegyű számot, amelynek a számjegyeiből képezhető, különböző számjegyeket tartalmazó kétjegyű számok összege egyenlő az eredeti háromjegyű számmal! ➔
- Egy n oldalú szabályos sokszög oldalhossza legyen a , beírt körének sugara r . A sokszög belsejében felvettünk egy P belső pontot, amelyből merőlegeseket állítottunk a sokszög minden oldalának egyenesére. Igaz-e, hogy ezen merőleges szakaszok hosszának összege állandó? ($n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$) ➔
- Számítsd ki 2013-nak azt a legkisebb többszörösét, amely 2014-re végződik! ➔

Országos döntő

1. Bizonyítsd be, hogy 1-től 2013-ig minden természetes szám előállítható a 2000 néhány osztójának összegeként! (Minden osztót legfeljebb egyszer szabad felhasználni egy szám előállításakor.) 
2. Három tanuló játékgolyókkal játszik. A golyókat a játék megkezdése előtt $7 : 6 : 5$ arányban osztották szét egymás között. Játékgolyóik számának aránya a játék végén a tanulók ugyanazon sorrendje szerint $6 : 5 : 4$. Valaki közülük 12 darab golyót nyert. Hány játékgolyót kaptak az egyes tanulók a játék megkezdése előtt? 
3. Egy „matematikus” kenguru a számegyenesen ugrál véletlenszerűen egyet jobbra vagy egyet balra tetszése szerint. Ugrásai 1 egységnyi hosszúak. Jelenleg a kezdőponton (nullán) áll és a 6-os ponton szeretne megpihenni, befejezni az ugrálást.
 - a) Az egyik alkalommal 8 ugrással jutott el a 6-os pontba pihenni. Hányféleképpen tehette meg az utat?
 - b) Egy másik alkalommal 10 ugrással jutott el a 6-os pontba pihenni. Hányféleképpen tehette meg az utat? 
4. Egy háromszög legnagyobb oldala kétszerese a legrövidebbnek. A legnagyobb oldallal szemközi szög háromszorosa a legkisebb oldallal szemközi szögnek. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge? 
5. Kovács úr egy évre bérbe akarja adni a házát. A hirdetésében a következő szöveg olvasható:

Ez a ház kiadó egy évre.
 $7 \cdot HÁZBÉR = 6 \cdot BÉR HÁZ$

A bérleti díjat Kovács úr *HÁZBÉR*-nek írta. Minden betű más-más számjegyet jelöl, egyforma betűk egyforma számjegyeket. A felírt szorzás igaz. Mennyibe kerül a *HÁZBÉR*? 

Országos döntő

1. Egyszer két juhász így beszélgetett:
– Adj nekem 8 bárányt, akkor nekem is annyi lesz, mint neked!
– Inkább te add nekem a bárányságod felét, s akkor nekem 7-szer annyi lesz, mint neked.
Hány bárányság volt egyik-egyik juhásznak? 
2. A tavon úszott egy labda, majd a tél beálltával befagyott a tó vize, s befagyott a labda. A labdát sikerült eltávolítani, így visszamaradt egy 24 cm átmérőjű, 6 cm mély „lyuk”. Mennyi a labda sugara? (Feltételezzük, hogy a labda gömb alakú, gumiból készült és belül üres! A labda középpontja a víz felszíne felett volt.) 
3. Egy körbe írható hatszögnek 6 darab 120° -os szöge van. Következik-e ebből, hogy a sokszög szabályos? 
4. Dudley Langford skót matematikus tiszteletére nevezzük DudLa számoknak azokat a számokat, amelyeknek minden számjegye legalább kétszer szerepel a számban, és az is igaz, hogy bármely két ugyanolyan értékű számjegy között annyi darab más értékű számjegy áll, mint amennyi azok értéke. Például ilyen DudLa szám a 723121327, mert két 1-es között 1 db, két 2-es között 2 db, két 3-as között 3 db, két 7-es között 7 db töle különböző értékű számjegy áll. Ebben a számban 3 darab 2-es van, a két szélső kettesre nem vonatkozik a szabály!
Melyek a hétjegyű DudLa számok? 
5. Az $ABCDE$ szabályos ötszög. Az A csúcsból állítsunk merőlegeseket a BC , CD és DE oldalak egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre Q , P és R . Legyen O az ötszög köré írható kör középpontja. Ha $OP = 1$, akkor mivel egyenlő $AO + AQ + AR$? 

Országos döntő

1. Bontsd fel a 13157-et négy szám összegére úgy, hogy ha az első részhez 2-t hozzáadunk, a második részből 3-at elveszünk, a harmadik részt 7-tel megszorozzuk, a negyedik részt 11-gyel elosztjuk, akkor mindig ugyanazt a számot kapjuk! 
2. Egy tíz résztvevős asztalitenisz versenyen mindenki pontosan egyszer mérkőzött mindenki-vel. Az egyes versenyzők győzelmeinek száma $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ vereségeinek száma rendre $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Bizonyítsd be, hogy a versenyzők által szerzett győzelmek száma négyzetének összege ugyanannyi, mint a vereségek száma négyzetének összege. 
3. Keress olyan prímszámokat, amelyekre igaz, hogy alkalmas számrendszerben felírva a számrendszer minden számjegyét pontosan egyszer használjuk fel! (0 nem állhat elől.) Igazold, hogy a hetes, illetve a tízes számrendszerben nincs ilyen szám. 
4. Legfeljebb hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak? (Megjegyzés: a feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem.) 
5. Bizonyítsd be, hogy minden természetes szám előállítható $a^2 + b^2 - c^2$ alakban, ahol a, b, c egész számok! 

MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

1. Okos Kata most kezdte megismerni a Word szövegszerkesztőjét. Nagyon lelkes volt, s egyből elhatározta, hogy 3-tól 2013-ig minden természetes számot beír egy fájlba. A számokat folytonosan írta egymás után, sem vesszővel, sem szóközzel nem választotta el azokat. Hány számjegyet kellett leírnia?

Katának 7 darab egyjegyű számot kellett leírni. Ez 7 számjegy. Mind a 90 darab kétjegyűt leírta, ez $90 \cdot 2 = 180$ számjegy. Mind a 900 darab háromjegyűt leírta, ez $900 \cdot 3 = 2700$ számjegy. A négyjegyű számok száma $2013 - 999 = 1014$ darab. A négyjegyűek leírásához $1014 \cdot 4 = 4056$ számjegy kellett. Tehát összesen

$$7 + 180 + 2700 + 4056 = 6943$$

számjegyre volt szükség.



2. Állítsd elő a 165-öt egymást követő pozitív egész számok összegeként! Gyűjts minél több megoldást!

Az alábbi esetek lehetségesek:

- Felbonthatjuk két egymást követő pozitív egész szám összegére: $82 + 83$.
- Három egymást követő pozitív egész szám összegére: $54 + 55 + 56$.
- Öt egymást követő pozitív egész szám összegére: $31 + 32 + 33 + 34 + 35 = 165$
- Hat egymást követő pozitív egész szám összegére: $25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 165$.
- Tíz egymást követő pozitív egész szám összegére: $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 = 165$
- Tizenegy egymást követő pozitív egész szám összegére: $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 165$
- Tizenöt egymást követő pozitív egész szám összegére: $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 165$.

Bizonyítható, hogy más lehetőség nincsen.



3. Három gyerek megegyezett abban, hogy a vesztes minden játék után a saját csokoládéjából megkészezi a többiek csokoládéját. Összesen három játszmát játszottak. Mindenki egyszer veszített. A játék végén mindenkinek 32 darab csokoládéja volt. Hány darab csokoládéja volt a játszma elején annak, akinek a legtöbbje volt?

Gondolkozzunk visszafelé. Feltehetjük, hogy az első gyerek veszítette el az első játékot, a második gyerek a másodikat, a harmadik pedig a harmadikat. Nézzük, melyik játék után melyiküknek mennyi csokija volt! A befejező állapotról tudjuk, hogy 32, 32, 32. A harmadik játék előtt 16, 16, 64 csokival rendelkeztek, hiszen a vesztes megduplázta a másik kettő csokijainak számát, akiknek így lett 32. Ebből következik, hogy korábban 16 csokijuk volt. Hasonló okoskodással a

második játék előtt 8, 56, 32 volt a játékosok csokijainak száma. (Kétféleképpen is kiszámíthatjuk, hogy a másodiknak 56 csokija van. Az egyik, hogy a csokik összege nem változik. Tudjuk, hogy a végén 96 darab van hármuknak összesen, így játék közben is. A másik, hogy az első 8, a harmadik játékos pedig 32 csokit nyert a másodiktól most, vagyis neki korábban ennyivel több volt. Tehát $16 + 8 + 32 = 56$ csokija volt a második játék előtt. Az első játék előtt pedig: 52, 28, 16. A válasz a feladat kérdésére tehát 52.



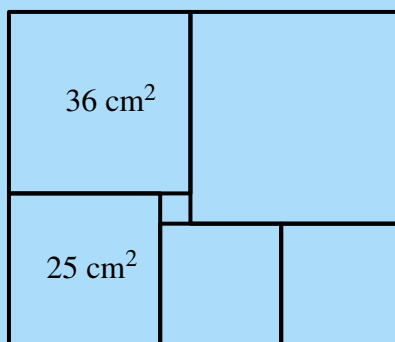
4. A mellékelt szorzásban írd az x -ek helyére számjegyeket úgy, hogy helyes legyen a műveletvégzés! Hány megoldása van a feladatnak? (Az x -ek értelemszerűen most csak a hiányzó számjegyek helyét jelölik!)

		7	x	7	·	x	7		
		x	x	7	x				
+		x	x	7	x				
	x	x	x	x	x				

Vegyük észre, hogy a szorzást a szorzó tízeseivel kezdték, ami a részletszorzatok elrendezéséből látszik. Így a második részletszorzat a szorzandó és a szorzó egyesei összeszorzásából, vagyis a $\overline{7x7} \cdot 7$ -ből adódik. Ebből következik, hogy az egyesek helyére kerülő számjegy csakis 9 lehet, hiszen $7 \cdot 7 = 49$. Beírjuk a 9-et és tudjuk, hogy a maradék 4. 7-ből 4 egyenlő 3, s most keresnünk kell egy olyan számot, amelyet 7-tel szorozva 3-ra végződő számot kapunk. Ez csak a 9 lehet, mert $9 \cdot 7 = 63$ végződik csak 3-ra. A szorzandó csakis 797 lehet, a második részletszorzat pedig biztosan 5579. A szorzandó középső jegye tehát 9-es. Folytassuk a szorzást. Most már a teljes szorzandót egyértelműen meghatároztuk. Hiányzik még a szorzó tízeze. Tehát a 797-et kell valamivel megszorozni, hogy az eredmény egy olyan négyjegyű szám legyen, amelyben a tízesek helyén 7 áll. Három ilyen szorzót is találunk: 77, 87, 97. Az első részletszorzat rendre 5579, 6376, 7173. A második részletszorzat minden esetben 5579. Az eredmény rendre 61369, 69339, 77309.



5. Az $ABCD$ téglalapot 6 négyzetre bontottuk fel. Közülük kettő területét beírtuk az ábrába. Hány cm az $ABCD$ téglalap kerülete?



A 25 cm^2 területű négyzet oldalhossza 5, a 36 cm^2 -esé pedig 6 cm. Ebből következik, hogy a téglalap egyik oldal 11 cm. Az is következik, hogy a legkisebb négyzet oldala 1 cm, hiszen annak a oldalhossza az előbbi két négyzet oldalhosszának különbsége. Ebből viszont az is következik, hogy az alsó két egybevágó négyzet oldalhossza 4 cm, hiszen 1 cm-rel kevesebb a 25 cm^2 területű négyzet oldalánál. Ezzel viszont megkaptuk a téglalap másik oldalának hosszát is: $5 + 4 + 4 = 13 \text{ cm}$. A kerület tehát:

$$K = 2(11 + 13) = 48 \text{ cm}.$$



Megyei forduló

1. Keresd meg mindazon tízes számrendszerben felírt természetes számokat, amelyek számjegyeik összegének 13-szorosával egyenlők!

Kétjegyű nem lehet a szám, mert ha $\overline{ab}$ lenne a szám, akkor $10a + b = 13(a + b)$ lenne, amiből $3a + 12b = 0$ következik. Ez viszont számjegyek esetén lehetetlen.

Tegyük fel, hogy az $\overline{abc}$ háromjegyű szám megfelel a feltételnek. Ekkor

$$100a + 10b + c = 13(a + b + c).$$

Ezt rendezve és 3-mal végigosztva:

$$29a = b + 4c.$$

A jobb oldal itt legfeljebb 45. Tehát a bal oldal is, és mivel a egy szám első számjegye, így $a = 1$. Amiből kapjuk, hogy $29 = b + 4c$. Mivel b és c számjegyek, így mindössze 3 megoldás van: $b = 1, c = 7$ vagy $b = 5, c = 6$ vagy $b = 9, c = 5$. Vagyis a megfelelő számok: 117, 156, 195.

A számnak nem lehet 3-nál több jegye. Egy n -jegyű számra igaz, hogy legalább 10^{n-1} . A számjegyeinek összege akkor a legnagyobb, ha minden jegye 9-es. Vagyis a számjegyek összege $9n$. Belátható, hogy $n > 3$ esetén $10^{n-1} > 13 \cdot 9n$, vagyis a kívánt feltétel nem teljesülhet.

A megoldások: 117, 156, 195.



2. Egy falu határában gabonaföldet, gyümölcsöst, zöldségekertészetet, halastavat és legelőt alakítottak ki az évek során. A földterületek nagyságáról csak annyit tudunk, hogy hektárban mérve mindegyik egész szám volt. Az első négy terület nagysága a falu határának $\frac{15}{81}, \frac{7}{24}, \frac{4}{21}, \frac{24}{80}$ része volt. A többi területet meghagyták legelőnek. Legkevesebb hány hektár lehetett a legelő területe?

Számoljuk ki, hogy hányad része a falu határának a legelő területe. Mivel

$$\frac{15}{81} + \frac{7}{24} + \frac{4}{21} + \frac{24}{80} = \frac{1400+2205+1440+2268}{7560} = \frac{7313}{7560},$$

ezért a legelő területe $\frac{247}{7560}$ -a a falu határának. Ez a tört tovább nem egyszerűsíthető, így a legelő területe legalább 247 hektár.



3. Hány olyan különbözőnek tekinthető téglatest van, amelynek a térfogata 2013 cm^3 és oldalai egész számok?

Tudjuk, hogy $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Ezt felhasználva könnyen megtalálhatjuk az összes lehetőséget az oldalak hosszára: $(1, 1, 2013)$; $(1, 3, 671)$; $(1, 11, 183)$; $(1, 33, 61)$; $(3, 11, 61)$.



4. A 13, 17, 37, 79 prímszámokból szintén prímszámokat kapunk, ha számjegyeiket felcseréljük. Létezik-e olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű prímszám, amelynek számjegyeit tetszőlegesen felcserélve szintén prímszámokat kapunk?

A keresett háromjegyű számban az 5-ös és a páros számok nem szerepelhetnek, hiszen lenne olyan eset, amikor ez lenne az utolsó számjegy, márpedig akkor biztosan nem lesz a szám prím. Maradt tehát 1, 3, 7, 9.

Négy esetet kell átgondolnunk az alapján, hogy ebből melyik 3 számjegyet választjuk.

- Az 1, 3, 7. nem jó, mert $371 = 7 \cdot 53$.
- Az 1, 3, 9 sem jó, hiszen $319 = 11 \cdot 29$ vagy $913 = 11 \cdot 83$.
- Az 1, 7, 9 sem jó, mert $791 = 7 \cdot 113$.

- Végül 3, 7, 9 sem jó, mert $973 = 7 \cdot 139$ vagy $793 = 13 \cdot 61$.

Tehát nem létezik a feladat szövegének megfelelő prímszám.



5. Mindegyik háromjegyű természetes számot elosztottuk a saját számjegyei összegével. Mekkora volt a legnagyobb maradék?

Tudjuk, hogy egy osztási műveletben a maradék legalább 1-gyel kisebb az osztónál. Háromjegyű számok esetén a legnagyobb számjegyösszeg a 27, így elvileg a legnagyobb maradék 26 lehetne. De a 27-es számjegyösszeg csak a 999 esetén valósul meg, ami viszont osztható 27-tel, azaz a maradék 0. A maradék tehát nem lehet 26.

A számjegyösszeg elvileg lehet 26 is (a maradék pedig 25). 3 ilyen szám van: 899, 989 és a 998. Az osztásokat elvégezve látható, hogy a maradék rendre 15, 1, 10. A maradék tehát 25 sem lehet. A számjegyösszeg lehet 25 is. Végiggondolva a szóba jöhető eseteket (799, 979, 997, 889, 898, 988) látható, hogy a 799 osztva a számjegyei összegével, a maradék 24.

A feladat kérdésére a válasz: 24.



Megyei forduló

1. Valaki 2012-ben annyi éves volt, mint születési éve számjegyeinek összege. Mikor születhetett?

Két esetet kell megkülönböztetni.

- Ha a XXI. században született, akkor:

$$\overline{20xy} + 2 + 0 + x + y = 2012.$$

Tehát $2000 + 10x + y + 2 + x + y = 2012$. Ebből kapjuk, hogy $11x + 2y = 10$. Ebből látható, hogy $x = 0$ és ekkor $y = 5$. Ebben az esetben 2005-ben született.

- Ha a XX. században született, akkor

$$\overline{19xy} + 1 + 9 + x + y = 2012.$$

Az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $11x + 2y = 102$. Mivel $2y$ legfeljebb 18, így x értéke legalább 8. Ha $x = 8$, akkor $y = 7$, míg $x = 9$ esetén nincs megoldás, hiszen a számjegyek egész számok. Ebben az esetben tehát 1987 lehet a születési év.

Az ellenőrzés megmutatja, hogy 1987 és 2005 is megfelel a feladat feltételeinek. (Feltételezzük, hogy egy 2012-ben élő ember nem született a XIX. században, vagyis legfeljebb 112 évesekre gondolunk.)



2. Írd le az 1000-et

- (a) 5 darab 9-es számjeggyel
- (b) 6 darab 1-es számjeggyel
- (c) 6 darab 5-ös számjeggyel
- (d) 5 darab 3-as számjeggyel.

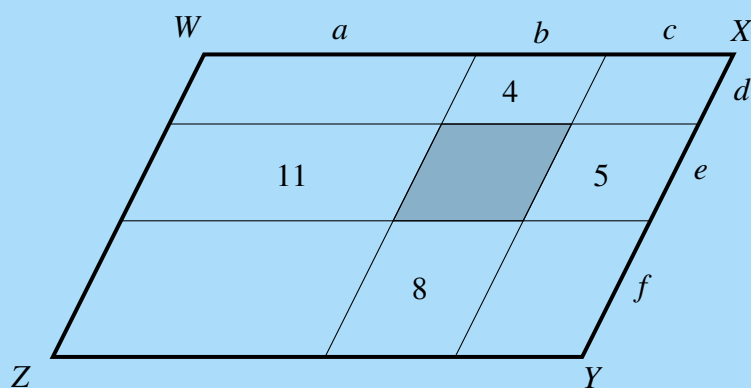
A leíráshoz mindenféle műveleti jelet és zárójeleket is használhatsz!

Egy-egy lehetséges megoldása a feladatoknak:

- (a) $1000 = 999 + \frac{9}{9}$.
 (b) $1000 = (11 - 1)^{1+1+1}$.
 (c) $1000 = (55 - 5) \cdot (5 \cdot 5 - 5) = (5 \cdot 5 - 5) \cdot 5 \cdot (5 + 5)$.
 (d) $1000 = \left(\frac{33-3}{3}\right)^3$.



3. A $WXYZ$ paralelogrammában az oldalakkal párhuzamosan vettünk fel két-két szakaszt. Ezek a nagy paralelogrammát 9 kisebb paralelogrammára bontották. Közülük négy kerületét centiméterben mérve beírtuk. Tudjuk még, hogy a $WXYZ$ paralelogramma kerülete 21 centiméter. Mekkora a sáfrányozott paralelogramma kerülete?



Az ábrán látható módon jelöljük a megfelelő szakaszok hosszát. A kérdéses paralelogramma kerülete:

$$K = 2(b + e).$$

Tudjuk 4 kis paralelogramma kerületét:

$$2(a + e) + 2(b + d) + 2(c + e) + 2(b + f) = 11 + 8 + 4 + 5 = 28.$$

A bal oldali kifejezést átrendezhetjük:

$$2(a + b + c + d + e + f) + 2(b + e).$$

Ennek első tagja éppen a nagy paralelogramma kerülete, amiről tudjuk, hogy 21. Ebből kapjuk, hogy a sáfrányozott paralelogramma kerülete $28 - 21 = 7$.



4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek felhasználásával készíts páronként különböző prímszámokat úgy, hogy minden számjegy pontosan kétszer szerepeljen az előállított primekben és a kapott prímszámok összege a lehető legkisebb legyen! Keress több megfelelő előállítást!

Első megoldás: Arra kell törekedni, hogy legfeljebb kétjegyű számokat képezzünk. Vegyük észre, hogy a 4-es, 6-os és a 8-as számjegy feltétlenül a tízesek helyén van. Így értékük a helyiértékeken $(4 + 6 + 8) \cdot 2 \cdot 10 = 360$ lesz. Ezeket prímszámmá a következő módokon lehet kiegészíteni: 41 vagy 47, 61 vagy 67, 83 vagy 89. A két 2-es illetve két 5-ös közül az egyiknek egyjegyűként kell szerepelnie, a másiknak a tízesek helyén. Ezek értéke $2 + 5 + 20 + 50 = 77$ lesz. Ha a tízesek helyére tesszük a 2-est, akkor az egyesek helyére 3-ast vagy 9-est tehetünk. Vagyis lesz egy 23 vagy 29. Ha a tízesek helyére tesszük az 5-öst, akkor az egyesek helyére 3-ast vagy 9-est tehetünk, tehát 53 vagy 59 lehet. A két 3-asnál és két 7-esnél mindegy, hogy az

egyesek helyi értékén áll egy kétjegyű számban vagy magányosan áll, összértéke mindenképpen 20 lesz. Az 1 és 9 esetén arra kell törekednünk, hogy a kétjegyű számban az egyesek helyi értékén álljanak. Így a mi összegünket $(1 + 9) \cdot 2 = 20$ -szal növelik. A kapott részeredményeket összeadjuk: $77 + 360 + 20 + 20 = 477$. Ennél kisebb összeg nem lehet. Ezen értéket meg is lehet valósítani. Látható a fenti okoskodásból, hogy a 2, 5, 41, 47, 61, 67, 83, 89 számoknak mindeképpen benne kell lenni az előállításban. Szabadságunk csak a 23, 29, 53, 59 tízesei, egyesei elrendezésében van. A konkrét előállítás: $2 + 5 + 23 + 41 + 47 + 59 + 61 + 67 + 83 + 89 = 477$ vagy $2 + 5 + 29 + 41 + 47 + 53 + 61 + 67 + 83 + 89 = 477$. Tehát két megoldás van, vagyis a minimális összeg 477.

Második megoldás: Mivel 4, 6, 8 nem lehet prímszámban egyesek helyén, és a 2 és az 5 is legfeljebb egy alkalommal, a 18 felhasználható számjegyből az alábbi 8 biztosan legalább tízest képvisel: 2, 4, 4, 5, 6, 6, 8, 8. Így ezek az összegben legalább $(2 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 8 + 8) \cdot 10 = 430$ -at adnak. A fennmaradó 10 számjegy még legalább $1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 7 + 7 + 9 + 9 = 47$ -tel növeli az összeget, amelynek lehetséges legkisebb értéke így $430 + 47 = 477$. Ez az érték akkor és csak akkor érhető el, ha az első csoportba sorolt 8 számjegy mindegyike tízes helyi értékre, a másik 10 mindegyike egyes helyi értékre kerül. Mivel a 2 és az 5 nem lehet többjegyű prím végén, ők biztosan egyjegyű számot alkotnak. 60-tól 69-ig csak a 61 és 67 prím, így ezeket be kell venni. Hasonlóan 80-tól 89-ig csak a 83 és 89 jó. Maradt a 2, 4, 4, 5 a tízesek közül és 1, 3, 7, 9 az egyeseknél. A 2-es és az 5-ös után egyaránt csak 3-as vagy 9-es jöhet, így a 4-esek után csak 1 és 7 jöhet (41, 47 prím). Így két megoldást kapunk aszerint, hogy 23 + 59-et vagy 29 + 53-at választunk. Vagyis a keresett minimum 477, amely pontosan kétféleképpen érhető el: $2 + 5 + 23 + 41 + 47 + 59 + 61 + 67 + 83 + 89$, illetve $2 + 5 + 29 + 41 + 47 + 53 + 61 + 67 + 83 + 89$.



5. Kezdetben egy darab számunk van, maga az 1. Meglevő számainkat gyarapíthatjuk a következő művelet segítségével: egy meglevő számot növelhetünk a szám valahány pozitív egész százalékkal, ha így ismét egész számot kapunk. A százalékláb a gyarapítás során 1-től 100-ig bármelyik egész szám lehet, beleértve a határokat is, de ennél több nem. Mutasd meg, hogy 1-től 50-ig minden egész számot elő lehet állítani! (Egy példa: ha már előállítottad a 8-at valamilyen módszerrel, akkor ebből meg tudod csinálni a 12-t, ha hozzáadod a 8-hoz annak 50%-át a 4-et, mert $8 + 4 = 12$.)

Az 1-ből meg tudjuk csinálni a 2-t, ha az 1-hez hozzáadjuk az 1 100%-át. A 3-at így állítjuk elő: a 2-höz hozzáadjuk a 2-nek az 50%-át. A 4 előállítása: a 2-höz hozzáadjuk a 2-nek a 100%-át. Az 5 előállítása: a 4-hez hozzáadjuk a 4-nek a 25%-át. A 6 előállítása: a 5-höz hozzáadjuk a 20%-át ($5 + 1 = 6$). A 7 előállítása: az 5-höz hozzáadjuk a 40%-át ($5 + 2 = 7$). A 8 előállítása: az 5-höz hozzáadjuk a 60%-át ($5 + 3 = 8$). A 9 előállítása: a 6-hoz hozzáadjuk az 50%-át ($6 + 3 = 9$). A 10 előállítása: a 8-hoz hozzáadjuk a 25%-át ($8 + 2 = 10$).

Vegyük észre, hogy a 10-nek a 10%-a 1, tehát 10%-onként lépkedve 11-től 20-ig mindent elő tudunk állítani.

A következő észrevétel: a 20-nak az 5%-a 1, tehát 5%-onként lépkedve 21-től 40-ig mindent elő tudunk állítani. Innentől a 25 4%-át és ennek többszöröseit használjuk. A 25-nek a 4%-a 1, tehát itt is egyesével tudunk 50-ig növelni.



1. Legyen A egy 2013-ra végződő pozitív egész szám, B pedig az a pozitív egész szám, amelyet A utolsó négy jegyének törlésével kapunk. Tudjuk, hogy A egész számú többszöröse B -nek. Hány ilyen A szám van?

A feladat szövege alapján

$$A = 10000B + 2013.$$

Mivel B osztja $10000B$ -t, ezért az egyenlőség alapján B akkor és csak akkor osztja A -t, ha osztja a 2013-at. Innen B értéke az 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671 és 2013 számok bármelyike lehet, de más nem. Minden B -hez pontosan egy A szám tartozik és különböző B -hez különböző A párosul. Tehát A ugyanannyi értéket vehet fel mint B , így 8-at. 

2. Négy különböző pozitív számjegy felhasználásával elkészítettük az összes olyan négyjegyű számot, amelyben a számjegyek különbözők. Ezeknek a négyjegyű számoknak 186648 az összegük. Melyek lehettek a kiinduló számjegyek?

Legyen a négy számjegy a , b , c és d . Hat olyan négyjegyű szám van, melyben az a az ezres helyi értéken szerepel:

$$\overline{abcd}, \overline{abdc}, \overline{acbd}, \overline{acdb}, \overline{adbc}, \overline{adcb}.$$

Ugyanígy hatszor szerepel az a a százask, tízesek és egyesek helyén is, és ezek a megállapítások mindegyik számjegyre érvényesek. Így amikor összeadjuk a számokat, minden számjegyet minden helyi értéken hatszor adunk össze, tehát a számok összege $6666 \cdot (a + b + c + d)$. Tehát

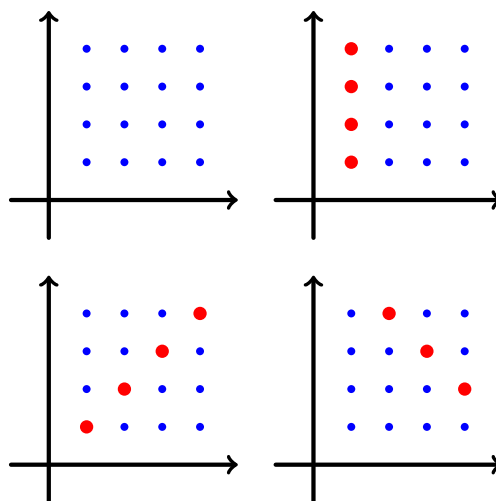
$$6666 \cdot (a + b + c + d) = 186648.$$

Ebből pedig $(a + b + c + d) = 28$. Ebből következően az alkalmas számjegyek pedig a $\{9, 8, 7, 4\}$ és $\{9, 8, 6, 5\}$. 

3. Hány olyan háromszög van, amelynek $(x; y)$ csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben az $1 \leq x \leq 4$ és $1 \leq y \leq 4$ feltételnek eleget tevő egész koordinátájú pontok?

A feladatban szereplő feltétel szerint x és y egymástól függetlenül 4 értéket vehetnek fel, így összesen $4 \cdot 4 = 16$ pont közül kerülhetnek ki a háromszöget csúcsai. Ezek egy 3×3 -as négyzetrács rácspontjain helyezkednek el. A 16 pontból a háromszög három csúcsa közül az első 16-féleképpen, a másodikat 15-féleképpen, a harmadikat 14-féleképpen választhatjuk ki. Legyen a kiválasztott háromszög ABC . Vegyük észre, hogy ezt a háromszöget hatféleképpen lehetett kiválasztani: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB és CBA sorrendekben. Tehát összesen $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{6} = 560$ féle háromszög képezhető ebből a 16 pontból.

Ez az 560 háromszög viszont tartalmaz néhány elfajuló háromszöget, tehát olyan ponthármast, melyek egy egyenesre esnek, így háromszög helyett egy szakasz keletkezik. Ezek az elfajuló háromszögek elhelyezkedhetnek a 3×3 -as négyzetrács oldalaival párhuzamos négy vízszintes és négy függőleges egyenesen. Ezek mind négy pontot, így négy elfajuló háromszöget tartalmaznak, tehát összesen $8 \cdot 4 = 32$ elfajuló háromszöget jelentenek.



Elhelyezkedhetnek továbbá a két átlón, melyek egyenként négy-négy újabb elfajuló háromszöget adnak.

Végül pedig az átlókkal párhuzamos három csúcsot tartalmazó négy darab „kis átló” szolgáltat egyenként egy, így összesen négy elfajuló háromszöget. Ezzel megszámoltuk az összes elfajuló háromszöget, amik száma tehát összesen $32 + 8 + 4 = 44$.

Ezek alapján összesen $560 - 44 = 516$ nem elfajuló háromszög van, melyek csúcsai a feladatban szereplő 16 pont közül kerülnek ki. 

4. Egy apa egy bizonyos összeget szétosztott a gyermekei között. A legidősebb 100 Ft-ot kapott és a maradék tized részét, a második 200 Ft-ot és az új maradék tized részét, a harmadik 300 Ft-ot és az új maradék tized részét és így tovább. A végén kiderült, hogy minden gyermek ugyanannyit kapott. Hány gyermek volt, és mennyit kapott egyik-egyik?

Jelölje x azt az összeget melyet az apa összesen szétoszt. Ekkor a legidősebb gyerek

$$100 + \frac{x - 100}{10} \text{ Ft-ot}$$

kap. A másodiknak

$$200 + \frac{x - (100 + \frac{x-100}{10}) - 200}{10} = 200 + \frac{x - 300 - \frac{x-100}{10}}{10} = 200 + \frac{x - 290 - \frac{x}{10}}{10} \text{ Ft}$$

jut. A feladat alapján mindkettőnek ugyanannyi pénz jutott tehát:

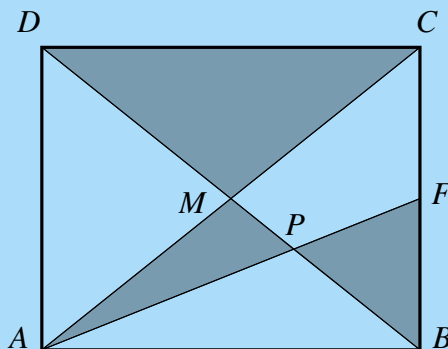
$$100 + \frac{x - 100}{10} = 200 + \frac{x - 290 - \frac{x}{10}}{10}.$$

Amiből:

$$1000 + x - 100 = 2000 + x - 290 - \frac{x}{10}.$$

Vagyis $810 = \frac{x}{10}$. Így: $x = 8100$. Ezek alapján az első két – és egyben az összes – gyerek 900 Ft-ot kap. Mivel $8100/900 = 9$, így 9 gyerek van. Ellenőrizhető, hogy mind a 9 gyerek 900 Ft-ot kap és az utolsónál elfogy az összes pénz. 

5. Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontja F . Hányadrésze a sáírozott területek összege a téglalap területének?



Messe a DB átló az AC és AF egyeneseket rendre M és P pontban. Mivel bármely téglalap átlói felezik a téglalap területét és egymást, így az ACD háromszög területe fele a téglalap területének, továbbá DM súlyvonal a háromszögben. Ismeretes, hogy a súlyvonal felezi a háromszög területét, így DMC háromszög területe fele az ADC háromszög területének, így negyede a téglalap területének.

Az ABC háromszögben a BM és AF súlyvonalak, így az AFB és AMB háromszögek területe egyaránt fele az ABC háromszög területének, így negyede a téglalap területének. Ismeretes, hogy a háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, tehát $\frac{FP}{FA} = \frac{MP}{MB} = \frac{1}{3}$. Mivel FPB és FAB háromszögek FP és FA oldalakhoz tartozó magassága megegyezik, így területük aránya megegyezik az FP és FA oldalak arányával. Tehát FPB háromszög területe harmada az FAB háromszög területének, így tizenkettede a téglalap területének. Ugyanígy MPA háromszög területe is tizenkettede a téglalap területének.

Tehát a sáírozott rész területe: $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ része a téglalap területének.



Országos döntő

1. Az iskolában lévő tanulói szekrényeket az 1-essel kezdődően egymás után sorszámozták műanyagból készült számjegyekkel. A számjegyek darabja 20 forint volt. Tehát a 9-es 20 forintba került, a 10-es pedig $20 \cdot 2 = 40$ -be. Az összes szekrény számozására 138900 forintot költöttünk. Mi volt az utolsó szekrény sorszáma?

Mivel 138900 Ft-ot költöttek és minden számjegy 20 Ft-ba került, így $\frac{138900}{20} = 6945$ számjegyet vásároltak. 1-től 9-ig sorszámozott szekrényekre összesen 9 számjegyet használtak. 10-től 99-ig $90 \cdot 2 = 180$ és 100-tól 999-ig $900 \cdot 3 = 2700$ számjegy kellett. Tehát 1-től 999-ig összesen $9 + 180 + 2700 = 2889$ számjegy fogyott el, így maradt $6945 - 2889 = 4056$ darab. 999 után 4-jegyű számok jönnek, így a 4056 darab számjegy további $\frac{4056}{4} = 1014$ számra elegendő. 999 után az 1014. szám a 2013, így 2013 az utolsó szekrény sorszáma.



2. Gondolatban írjuk le a dátumokat év.hónap.nap formátumban. Pl. 1948.3.25. Nevezzük ezt a dátumot „vegyesnek”, mert minden jegye különböző. Hány nap telik el a XX. század utolsó „vegyes” dátumától a XXI. század első „vegyes” dátumáig? (Egyjegyű hónap és egyjegyű nap száma elé nem kell 0-át írni!)

Az utolsó „vegyes” dátum a XX. században az 1987.6.30 és az első a XXI. században a 2013.4.5. Tehát azt kell kiszámolni, hogy eközött a két dátum között hány nap telt el. Induljunk az 1987.6.30-as dátumtól! Ez a dátum június utolsó napja, így ebben az évben összesen 6 teljes hónap van még hátra, melyek a július, augusztus, szeptember, október, november és december. Ezek rendre 31, 31, 30, 31, 30, illetve 31 napos hónapok, így 1988.1.1-ig $31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 184$ nap van. Ezek után 1988.1.1-től 2013.1.1-ig összesen 25 év van, így eközött összesen $25 \cdot 365 = 9125$ nap telik el. Eközött a 25 év között 7 szökőév is van (1988, 1992, 1996, 2000, 2004, 2008 és 2012), melyek újabb 7 napot szolgáltatnak. Ezután már csak 2013-ban eltelt napok számát kell megszámolni. 2013.4.5-ig eltelik egy teljes január, február és március, melyek rendre 31, 28, illetve 31 naposak. Áprilisban még további 4 nap telt el. Tehát 1987.6.30-tól 2013.4.5-ig összesen

$$184 + 9125 + 7 + 31 + 28 + 31 + 4 = 9410$$

nap telik el.



3. Egy ötletes rövidítést vezetünk be olyan számok leírására, amelyben sok egyforma számjegy áll egymás után: jelölje d_n a d számjegy n -szeres fellépését. Az n lehet 1, 2, 3, ... Pl. $77755 = 7_3 5_2$, $11119999988333 = 1_4 9_5 8_2 3_3$, $5557755 = 5_3 7_2 5_2$. Ha ezen jelölés mellett

$$2_x 3_y 5_z + 3_z 5_x 2_y = 5_3 7_2 8_3 5_1 7_3.$$

akkor mivel egyenlő x , y és z ?

Vizsgáljuk az összeadást az egyes helyiértéktől indulva. A $2_x 3_y 5_z$ utolsó számjegye az 5 és a $3_z 5_x 2_y$ utolsó számjegye a 2.

Az összegben a tízes helyi értéken 7-es van. Mivel az összeadandókban csak a 2-es, 3-as és 5-ös számjegy áll, így ellenőrizhető, hogy csak akkor lehet a tízesek helyén az összegben 7, ha az összeadandókban a 2-es és 5-ös szerepel (hiszen átváltás az egyes helyiértéken nincs). A 2-es nem lehet a $2_x 3_y 5_z$ számban a tízesek helyén, mert az első 2-es előtt kell szerepelnie 3-as számjegynek. Tehát $2_x 3_y 5_z$ szám tízes helyiértékén az 5-ös van és $3_z 5_x 2_y$ számnál pedig a 2-es.

Ugyanez a megfontolás igaz a százask helyiértékét nézve. Ekkor is az derül ki, hogy a százask helyén a $2_x 3_y 5_z$ számban 5-ös fog állni és a $3_z 5_x 2_y$ számban 2-es.

Az összegben az ezresek helyén 5-ös számjegy áll. Mivel átváltás a százasknál sincs, ezért ellenőrizhető, hogy ez csak úgy lehet, hogy az összeadandók ezres helyiértékénél egyikben 3-as, a másikban egy 2-es számjegy áll. (Lehetne úgy is, hogy az egyik összeadandó csak 3 számjegyű és a másik összeadandó ezres helyiértékén pedig 5-ös áll, de mindkét szám $x + y + z$ jegyű, így ez nem fordulhat elő.) Mivel eddig még nem szerepelt 3-as számjegy a 2-es továbbra sem lehet a $2_x 3_y 5_z$ számban, így ennek a számnak ezres helyiértékén a 3-as van. Ebből már következik, hogy $z = 3$, hiszen a $2_x 3_y 5_z$ szám 3 darab 5-ösre végződik.

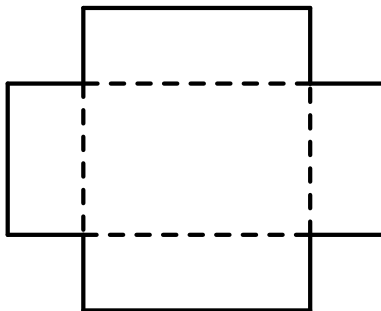
Mivel megint nincs átváltás, így az összegben található tízezres helyiértéken lévő 8-as csak úgy érhető el, hogy az összeadandókban ezen a helyiértéken egyikben 5-ös, a másikban 3-as van. Akárhogy is van elrendezve a $3_z 5_x 2_y$ számban megszakad a 2-es számjegy sorozata, így ez 4 darab 2-re végződik, amiből következik, hogy $y = 4$.

Mivel a 2, 3 és 5 jegyű számoknál az összeadásnál átváltás csak két 5-ös összeadásával lehetséges és a $2_x 3_y 5_z$ számban csak az utolsó három jegy 5-ös, ekkor viszont a másik számban csak 2-es számjegy van, így az összeadásnál nem történik sehol átvitel. Mivel mindkét összeadandó $x + y + z$ jegyű, így az összeg is ennyi jegyből áll. Viszont az összeg $3 + 2 + 3 + 1 + 3 = 12$ jegyű, így $x + y + z = x + 4 + 3 = 12$, ahonnan $x = 5$. Tehát $x = 5$, $y = 4$ és $z = 3$, melyek valóban jó megoldást szolgáltatnak.



4. Egy 82 cm hosszú és 40 cm széles téglalap alakú keménylap négy sarkából levágtunk egy-egy egybevágó négyzetet, a megmaradt papírból egy felül nyitott téglatest alakú dobozt készítettünk. Milyen magas volt a doboz, ha annak elkészítéséhez felhasznált papír 3136 cm^2 volt?

Ha a téglalap négy sarkáról levágjuk a négyzeteket, akkor az ábrán lévő alakzatot kapjuk.



Ebből a dobozt úgy készíthetjük el, hogy a szaggatott vonallal határolt téglalap lesz a doboz alja és az ezt körülvevő négy kisebb téglalap behajtva alkotja a doboz négy falát. Ebből viszont az következik, hogy a doboz olyan magas, mint a levágott négyzetek oldalhossza. Eredetileg (a vágás előtt) a téglalap területe $82 \cdot 40 = 3280 \text{ cm}^2$ volt. Mivel csak 3136 cm^2 került felhasználásra, így a levágott négy négyzet összterülete $3280 - 3136 = 144 \text{ cm}^2$. Mivel a négyzetek egybevágóak, így egy négyzet területe $\frac{144}{4} = 36 \text{ cm}^2$. Ebből viszont következik, hogy egy négyzet oldala, így a doboz magassága is 6 cm. 

5. A bűvös négyzetben minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban a számok összege ugyanannyi. Egy $3 \cdot 3$ -as méretű bűvös négyzetet hiányosan töltöttünk ki. Írd be a hiányzó számokat! Írd le a gondolatmenetedet is!

40	a	28
13	b	c
d	e	10

Jelöljük a hiányzó számokat a , b , c , d és e -vel az ábrának megfelelően. Továbbá legyen x az ebben a bűvös négyzetben lévő oszlopokban, sorokban és az átlókban lévő összeg. Ekkor az egyik átló miatt $40 + b + 10 = x$, amiből $b = x - 50$. Az egyik oszlopból tudjuk, hogy $28 + c + 10 = x$, amiből $c = x - 38$. Ekkor az egyik sorból $13 + b + c = x = 13 + (x - 50) + (x - 38) = 2x - 75$. Így $x = 2x - 75$, tehát $x = 75$. Innen tudjuk, hogy $b = 25$ és $c = 37$. Ekkor a $40 + a + 28 = x = 75$ -ből láthatjuk, hogy $a = 7$ és végül pedig a $40 + 13 + d = x = 75$ illetve az $a + b + e = 7 + 25 + e = x = 75$ egyenlőségekből következik, hogy $d = 22$ és $e = 43$. Így találtunk egy helyes kitöltést (a mellékelt ábrán látható) és az is kiderült, hogy nincs más megoldás.

40	7	28
13	25	37
22	43	10



Országos döntő

1. Állítsd elő a 100-at egymástól különböző módokon az 1, 2, 3, ..., 9 számjegyek segítségével, négy alpműveleti jelet és zárójelet használhatsz, de a számjegyek sorrendjét nem változtathatod meg! Ha két vagy több számjegy közé nem teszel semmilyen megengedett jelet, akkor azokat (balról kezdve) egy többjegyű számnak olvashatod!

(a) $100 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

(b) $100 = 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

Helyes előállítások a következők. (Egyéb megoldások is léteznek.)

(a) $100 = (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5 \cdot ((-6) + 7 - 8 + 9)$

$100 = 123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9$

$100 = 1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6 - 7) \cdot (8 - 9)$

(b) $100 = 9 \cdot 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

$100 = (9 + 8 - 7 - 6) \cdot 5 \cdot (4 \cdot 3 / 2 - 1)$

$100 = 98 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 - 1$



2. 300 darab 1 cm^3 -es kiskocka mindegyikét felhasználva különféle méretű tömör téglatesteket állítottunk össze. Hány olyan téglatest van, amelynek oldalhosszai egész számok és a térfogata 300 cm^3 ? Írd le a talált testek méreteit!

Azok a téglatestek, melyek térfogata 300 cm^3 és 1 cm^3 -es kiskockákból épülnek fel, pontosan azok, melyek méretei (hosszúság, szélesség, magasság) centiméterben mérve egész számok és ezen három szám szorzata 300. Két téglatest akkor különbözik, ha a három méretük centiméterben mérve különböző számhármast ad. (Egy számhármásban lévő számok sorrendje *nem* számít!) Ezek alapján összeszedhető a 20 féle téglatest, melyek méretei centiméterben mérve:

1, 1, 300; 1, 2, 150; 1, 3, 100; 1, 4, 75; 1, 5, 60; 1, 6, 50; 1, 10, 30; 1, 12, 25; 1, 15, 20;

2, 2, 75; 2, 3, 50; 2, 5, 30; 2, 6, 25; 2, 10, 15;

3, 4, 25; 3, 5, 20; 3, 10, 10;

4, 5, 15;

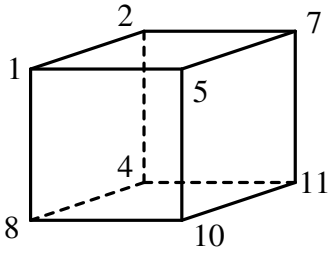
5, 5, 12; 5, 6, 10.



3. (a) Igazold, hogy nem helyezhetünk el egy kocka csúcsaiban a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számok közül nyolc különbözőt úgy, hogy bármely él két végpontjában levő számok összege osztható legyen 2-vel.
- (b) Igazold, hogy elhelyezhetünk egy kocka csúcsaiban a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számok közül nyolc különbözőt úgy, hogy bármely él két végpontjában levő számok összege osztható legyen 3-mal.

(a) Egy él két végpontjában lévő szám összege, akkor lesz osztható 2-vel, ha mindkét szám páratlan vagy mindkettő páros. Tehát szomszédos csúcsok paritása azonos. Így ha jól számozzuk (a feladatnak megfelelően) egy kocka csúcsait és az egyik csúcsban páros szám van, akkor ezen csúcs szomszédjaiban is páros szám kell szerepeljen és ekkor ezek szomszédjaiban is és így tovább. Így eljuthatunk az összes csúcshoz, tehát megbizonyosodhatunk, hogy ha egyik csúcsban páros szám van, akkor az összesben. Ugyanígy látható, hogyha van egy páratlan számmal ellátott csúcs, akkor mindenhol az van. Tehát ha egy kockát jól számozzunk, akkor

vagy csak páros vagy csak páratlan számot használunk a számozáshoz. Viszont a megadott 13 szám között 7 darab páros és 6 darab páratlan szám szerepel, így nem választhatunk ki közülük 8 darab azonos paritású számot.

- (b) Egy él két végpontjában lévő számok összege akkor lesz 3-mal osztható, ha mindkét szám 3-mal osztható vagy ha az egyik szám 1-et, a másik pedig 2-t ad maradékul 3-mal osztva. Tehát, ha van 3-mal osztható szám az egyik csúcsban, akkor az előző gondolatmenet alapján minden számnak 3-mal oszthatónak kell lennie, de a felsorolt 13 szám között nincs 8 darab 3-mal osztható, így ez nem lehetséges. Viszont ha a másik lehetőséggel próbálkozunk, vagyis az élek egyik végpontjában lévő szám 1-et, a másik 2-t ad 3-mal osztva maradékul, akkor találhatunk helyes számozást. Egy jó számozás az ábrán látható. 

4. Az ősszel almát szedtünk. A vödörbe és a kosárba gyűjtött almát beleborítottuk a ládába, majd tovább szedtük a kisebb edényekbe. Egy vödörben 36 kilogrammal kevesebb alma volt, mint egy ládában. A ládában pedig 12 kilogrammal több alma van a kosárban lévő alma kétszeresénél. A kosárban pedig 6 kilogrammal több alma van, mint a vödörben. Mennyi almát szedtünk, ha a szüret végén négy ládánk, három vödrünk és egy kosarunk volt tele? (A szövegben szereplő adatok mindig a tele edényekre vonatkoznak.)

Jelöljük a vödörben, kosárban és ládában tárolható alma mennyiséget kilogrammban mérve rendre v -vel, k -val és l -lel. Ekkor a feladatban található kikötések alapján teljesül, hogy

$$\begin{aligned}v + 36 &= l \\l - 12 &= 2k \\k - 6 &= v\end{aligned}$$

Ekkor harmadik és első egyenletet használva láthatjuk, hogy $v + 36 = (k - 6) + 36 = k + 30 = l$. Ezt és a második egyenletet felhasználva $l - 12 = (k + 30) - 12 = k + 18 = 2k$, amiből kapjuk, hogy $k = 18$. Így a harmadik egyenletet használva $k - 6 = 18 - 6 = 12 = v$, illetve a másodikat használva $l - 12 = 2k = 2 \cdot 18 = 36$, amiből $l = 48$. Így a szüret végén a négy láda, három vödör és egy kosár összesen $4l + 3v + k = 4 \cdot 48 + 3 \cdot 12 + 18 = 246$ kilogramm almát jelent. 

5. Öt számkártyánk van

1	2		8	9
---	---	--	---	---

. Mindegyiken egy-egy nullánál nagyobb, de egymástól különböző számjegy áll. Az egyik számkártya fordítva került a képre, ezért nem látható, hogy melyik számjegy van rajta. Az öt számkártya felhasználásával egy kétjegyű és egy háromjegyű számot állítunk elő. Mennyi lehet a két legnagyobb különbségű szám különbségének és a két legkisebb különbségű szám különbségének a különbsége?

Jelölje x az utolsó kártyán lévő számjegyet. Mivel a kártyákon lévő számjegyek különbözők és nem szerepel köztük a 0, így $8 > x > 2$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Bármely 3-jegyű szám nagyobb egy 2-jegyű számnál, így egy 3-jegyű és egy 2-jegyű szám különbségét úgy kapjuk meg, hogy a 3-jegyű számból kivonjuk a 2-jegyűt. Tehát ha ezt a különbséget akarjuk maximalizálni, akkor arra törekszünk, hogy a 3-jegyű szám minél nagyobb a 2-jegyű szám pedig minél kisebb legyen. Figyelembe véve, hogy $8 > x > 2$, a legnagyobb 3-jegyű jegyű szám, ami ebből az 5 kártyából készíthető a $\overline{98x}$ és a legkisebb 2-jegyű pedig a 12. Ezek egyidejűleg elkészíthetőek, így a legnagyobb különbség, ami elérhető a $\overline{98x} - 12$.

Ha a legkisebb különbségre törekszünk, akkor a 3-jegyű számot akarjuk minimalizálni és a 2-jegyű számot maximalizálni. Ekkor is elérhető egyidejűleg a legkisebb 3-jegyű és legnagyobb 2-jegyű szám, ami elkészíthető ezen 5 kártyából, amik rendre a $\overline{12x}$ és 98. Így a minimális különbség itt a $\overline{12x} - 98$.

Tehát a két legnagyobb különbségű szám különbségének és a két legkisebb különbségű szám különbségének a különbsége $98x - 12 - (\overline{12x} - 98) = (10 \cdot 98 + x) - 12 - ([10 \cdot 12 + x] - 98) = 946$ függetlenül az utolsó kártyán lévő számtól.



Országos döntő

1. Egy 90 méter hosszú és 28,5 méter széles, téglalap alakú telken nyulakat és tyúkokat tenyészt egy gazda. Amikor egy látogató érkezett, megkérdezte, hogy hány nyúl és hány tyúk van a telepen. A gazda így válaszolt: „Az állatoknak összesen 2652 lábuk és annyi fejük van, mint a telek – m^2 -ben kifejezett – terület mérőszámának 2 ötöd része.” A látogató nem ismerte a terület nagyságát, így nem tudta megoldani a feladatot. Segítsünk neki!

A telek területe $90 \cdot 28,5 = 2565 m^2$, aminek $2/5$ -e éppen 1026. Vagyis 1026 állat van a telken. (Feltéve, hogy minden állatnak pontosan egy feje van.)

Első megoldás: Ha minden állatnak két lába lenne, akkor 2052 lábuk lenne összesen. A valóságban ennél 600-zal több láb van, amit a nyulak adnak, hiszen nekik 2 helyett 4 lábuk van. A 600 láb „felesleget” így 300 nyúl adja.

Második megoldás: Egyenletrendszerrel is megoldhatjuk a feladatot. Legyen n darab nyúl és t darab tyúk a telken. Ekkor egyrészt tudjuk, hogy $t + n = 1026$, hiszen ennyi állat van összesen. Másrészt pedig $2t + 4n = 2652$, hiszen ennyi lábuk van összesen. Ezt megoldva kapjuk a végeredményt.

Vagyis 300 nyúl és 726 tyúk adja a 2652 lábat.



2. 1 cm élű kockákból $18 \times 18 \times 18$ -as méretű tömör kockát raktunk össze, majd a felszínét pirosra festettük. Legkevesebb hány pirosra színezett kiskockát kell elvenni a nagy kockából, hogy a megmaradó test felszíne 2014 legyen! Indokolj!

A nagy kocka felszíne $6 \cdot 18^2 = 1944 cm^2$, ami 70-nel kevesebb 2014-nél. Tehát $70 cm^2$ -rel kell a nagy kocka felszínét növelnünk. Ha a teljes kockából veszünk el egy kis kockát, akkor a következőképpen változhat a kocka felszíne:

- ha csúcsnál lévő kis kockát veszünk el, akkor nem változik a felszín,
- ha egy élnél lévő, akkor 2-vel nő,
- ha egy oldal belsején lévő, akkor 4-gyel nő.

Ezek alapján minél több egymással nem szomszédos oldal belsejénél lévő kis kockát érdemes elvenni, mert ezek növelik leginkább a felületet. 17 ilyen elvétele után 68-cal nőtt a felület, így még el kell vennünk egy kockát valamelyik élről is. Könnyen meggondolhatjuk, hogy ez meg is valósítható. Összesen tehát legkevesebb 18 kocka elvételével oldható meg a feladat.

Megjegyzés: Ha nem csak a kocka „felszínén” lévő kis kockákat lehet elvenni, akkor kevesebb kis kocka elvételével is megvalósítható a felület 2014-re növelése.



3. A Kalmár döntőre egy iskolából 6 gyerek, valamint Alfa, Béta és Gamma tanár urak utaztak el. Számukra egy sorban 9 egymás melletti helyet tartottak fenn a rendezvény szervezői. A tanárok érkeztek elsőként, és elhatározták, hogy úgy fognak leülni, hogy mindhárman két diák között üljenek. Hányféle ülésrend képzelhető el?

Számozzuk meg a székeket 1-től 10-ig. Ekkor 10 féleképpen lehet 3 helyet kiválasztani a tanároknak úgy, hogy minden tanár mindkét közvetlen szomszédja diák legyen. Ezek a lehetőségek: 246, 247, 248, 257, 258, 268, 357, 358, 368, 468. Ha rögzítettük a tanárok helyét, akkor azon a három helyen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképpen ülhetnek a diákok. A diákok a kimaradó 6 helyen ugyanilyen megfontolásból $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ különböző féleképpen helyezkedhetnek el. Így az összes lehetőség száma: $10 \cdot 6 \cdot 720 = 43200$. 

4. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel a nulla számjegy?

Első megoldás: Számoljuk meg a számokat aszerint, hogy hány 0 szerepel bennük.

- 1 darab 0. Ekkor a másik 3 számjegy egymástól függetlenül 9 féle lehet. Ha a 0 helyét rögzítjük, akkor 9^3 ilyen szám van. De 3 helyen lehet a 0, így összesen $3 \cdot 9^3 = 2187$ ilyen szám van.
- 2 darab 0. Ekkor a maradék két számjegy egymástól függetlenül 9 féle lehet. Ha a két 0 helyét rögzítjük, akkor 9^2 ilyen szám van. A két 0 háromféleképpen helyezkedhet el, vagyis összesen $3 \cdot 9^2 = 243$ ilyen szám van.
- 3 darab 0. Ilyen számból nyilván 9 darab van: 1000, 2000, ..., 9000.

Összesen tehát $2187 + 243 + 9 = 2439$ ilyen szám van.

Második megoldás: Számoljuk meg azokat a számokat, amikben nincsen 0, majd ezeket vonjuk le az összes négyjegyű szám számából. Ha nem lehet a számban 0 számjegy, akkor minden helyiértéken egymástól függetlenül 9 féle számjegy lehetséges. Vagyis $9^4 = 6561$ olyan négyjegyű szám van, amiben nem szerepel 0. Mivel 9000 négyjegyű szám van összesen, ezért $9000 - 6561 = 2439$ olyan szám van, amiben szerepel a 0 számjegy. 

5. Ha az 1234 négyjegyű számból minden lehetséges módon törölünk két számjegyet, majd az így megmaradt két számjegyet kétjegyű számként kiolvassuk, akkor a 12, 13, 14, 23, 24, 34 számokat kapjuk. Ezek összege 120. Keressetek olyan négyjegyű számot, amelynél ez az összeg a) 220 b) 540. (Vigyázz! Pl. az 1052-ben a 02 nem kétjegyű, hanem egyjegyű és értéke 2.)

Legyen a keresett négyjegyű szám $\overline{abcd}$. Ekkor a vizsgált összeg: $\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{bc} + \overline{bd} + \overline{cd}$, ami ilyen alakban is írható:

$$10a + b + 10a + c + 10a + d + 10b + c + 10b + d + 10c + d = 30a + 21b + 12c + 3d.$$

- a) Ez az összeg osztható 3-mal, hiszen minden tagja osztható 3-mal. Viszont 220 nem osztható 3-mal, így nem létezik olyan 4-jegyű szám, amire a fenti összeg 220 lenne.
- b) 540 osztható 3-mal, így az előző bizonyítás nem működik, de ez nem jelenti azt, hogy feltétlenül kell is ilyen számnak lennie. Ha van ilyen szám, akkor tudjuk, hogy

$$30a + 21b + 12c + 3d = 540.$$

Oszthatunk 3-mal, ekkor a kicsit egyszerűbb $10a + 7b + 4c + d = 180$ egyenlethez jutunk. Ha $a = 9$, akkor $7b + 4c + d = 90$. Ha $b = 9$, akkor $4c + d = 27$. Ebben az esetben c legfeljebb 6 lehet. Ekkor $c = 6$ és $d = 3$ esetén jó megoldást kapunk. Ily módon juthatunk el a 9963-hoz, ami megfelelő szám.

A feladat szövege nem kérte, de az összes jó megoldás: **9963, 9957, 9882, 9876, 9795, 9789, 8991, 8985, 8979, 8898.**



Országos döntő

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 9-cel és 25-tel, és mind a négy számjegye különböző?

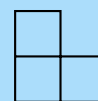
Ha egy szám osztható 25-tel, akkor az utolsó 2 számjegye 00, 25, 50 vagy 75. Mivel a keresett számainknak minden számjegye különböző, így a 00 végződés nem jön szóba. A keresett számok 9-cel is oszthatóak, vagyis a számjegyek összege osztható 9-cel. Ezek alapján az alábbi lehetőségek vannak:

- 25-re végződik a szám. Ennek a két számjegynek az összege 7, így a maradék két számjegy összege 2 vagy 11, mert csak így lehet a számjegyek összege 9-cel osztható. Két számjegy összegeként a 2 csak úgy állhat elő, hogy 1, 1, illetve 2, 0, de ez egyik sem jó, hiszen különbözőknek kell lenniük a számjegyeknek, és a végződésben már van 2-es. Ha 11 az összeg, akkor nem lehet a két számjegy azonos, ezzel nem kell törődnünk. Viszont el kell kerülnünk a 2-t és az 5-öt. Így négy lehetőség képzelhető el: **3825, 4725, 7425, 8325.**
- 50-re végződik a szám. Ekkor a másik két számjegy összege 4 vagy 13 lehet. Hasonlóan az előzőekhez, ha nem lehet két azonos számjegy, illetve 5 és 0 sem, akkor a következő esetek lehetségesek: **1350, 3150, illetve 4950, 6750, 7650, 9450.**
- 75-re végződik a szám. Ekkor a másik két számjegy összege 6 vagy 15. Így 5 lehetőség van: **2475, 4275, 6075, illetve 6975, 9675.**

Összesen 15 szám felel meg a feladatban megfogalmazott feltételeknek.



2. Egy 8×8 -as sakktábla mezőire az ábrán látható módon írtuk be a számokat 1-től 64-ig. Helyezzétek a sakktábla mezőire ezt a három kis négyzetből álló alakzatot! Hány olyan elhelyezés lehetséges, amelyben a lefedett mezőkben lévő számok összege osztható 3-mal? A kis alakzatot tetszőlegesen forgathatod a sakktáblán!



1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

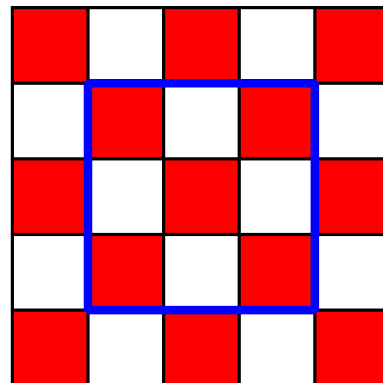
Első megoldás: A bal felső 2×2 -es négyzetben két elhelyezés lehetséges: 1, 2, 9, illetve 2, 9,

10. Ha egy jól elhelyezett alakzatot vízszintesen egy négyzettel jobbra mozgatunk, akkor is jó elhelyezést kapunk, hiszen mindhárom lefedett szám 1-gyel nő, így az összeg éppen 3-mal. Így tehát az első két sorban 14 jó elhelyezés van, hiszen 6-szor lehet eggyel-eggyel jobbra tolni az alakzatot. Hasonlóan lefelé elmozdítva az alakzatot, szintén jó elhelyezést kapunk, akkor ugyanis minden lefedett szám értéke 8-cal nő, az összeg tehát éppen 24-gyel. Így jó elhelyezésből jó elhelyezést kapunk. 6-szor lehet egyesével lejjebb tolni a jó alakzatokat, vagyis összesen $7 \cdot 14 = 98$ megfelelő elhelyezés van.

Második megoldás: Ha tetszőleges 2×2 -es négyzet bal felső sarkában n szerepel, akkor a másik három mezőn $n+1$, $n+8$ és $n+9$ található. A 4 lehetséges elhelyezésből az n , $n+1$, $n+8$ lefedése esetén az összeg $3n+9$, ami osztható 3-mal, illetve az $n+1$, $n+8$, $n+9$, ami $3n+18$. Tehát minden 2×2 -es négyzetben két jó elhelyezés van. 2×2 -es négyzet 49 van a táblán, hiszen a bal felső sarka meghatározza a négyzete, az pedig bárhol lehet a nagy négyzet bal felső 7×7 -es négyzetében. Így a megoldások száma $2 \cdot 49 = 98$. 

3. Egy kocka 125 darab 1 cm^3 -es fehér és piros kiskockából áll. Köztük pontosan annyi fehérre festett van, amennyi szükséges ahhoz, hogy a nagykocka külsején a fehér és a piros négyzetlapok sakktáblaszerűen helyezkedjenek el. Hány fehérre festett kocka van a 125 között, ha a csúcsokba piros kockát helyeztünk el?

A kocka élhosszúsága 5 cm, hiszen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Nézzük a kocka egyik lapját. Ha a csúcsokban piros kis kockák vannak, akkor egy lapon 12 fehér kockát látunk. Ebből 4 helyezkedik el a belső 3×3 -as négyzetben. Így tehát minden oldalon van 4, ami összesen $6 \cdot 4 = 24$ fehér kocka. Ezeken kívül a kocka minden élén van 2 fehér kis kocka. (Ha ezeket laponként számolnánk, akkor minden ilyen fehér kockát kétszer vennénk számításba.) Mivel 12 éle van egy kockának, így összesen 24 fehér kis kocka van a nagy kocka élénél. Vagyis 48 fehér kis kocka segítségével előállítható a kívánt test.



Második megoldás: A kockát felszeletelhetjük 5 részre az egyik oldalával párhuzamosan és minden szeletben megnézhetjük, hogy hány fehér kis kocka van. Az első és az utolsó szeletben éppen az ábrán látható kis kockák lesznek fehérek, ami összesen 24 darab. A második és negyedik szeletben csak a kék négyzeten kívüli keretben lesz fehér négyzet, mégpedig $8 \cdot 8$ darab. (Pontosan azok, amik ezen az ábrán éppen pirosak.) A harmadik szeletben ismét 8 fehér kis kocka lesz, azok, amik a kék kereten kívül az ábrán is fehérek. 

4. Egy egyenlőszárú háromszög oldalai rendre $(x+89)$, $(7x+41)$ és $(3x+85)$ cm. Az x értékéről semmi információnk nincs. Hány cm a háromszög területének a lehető legnagyobb értéke?

Három eset lehetséges aszerint, hogy a háromszögnek melyik két oldala egyenlő:

- Ha $x+89 = 7x+41$, akkor ebből azt kapjuk, hogy $x = 8$, a terület pedig $97 + 97 + 109 = 303$ cm.
- Ha $x+89 = 3x+85$, akkor $x = 2$, amiből a terület $91 + 55 + 91 = 237$ cm.
- Ha $7x+41 = 3x+85$, akkor $x = 11$, vagyis a terület $100 + 118 + 118 = 336$ cm.

Mivel $100 + 118 > 118$, így teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, vagyis létezik ilyen háromszög. A lehető legnagyobb terület tehát 336 cm. 

5. Egy nagy papírlapra leírtuk az évszámokat egymás után István király megkoronázásának évétől a mostani évig (2013-ig, a 2013-at is beleértve). Mennyivel egyenlő a leírt évszámok számjegyeinek összege? (Istvánt 1001. január 1-jén koronázták meg.)

Nézzük meg, hogy melyik helyiértéken melyik számjegy hányszor szerepel 1001 és 1999 között. Az ezresek helyén az 1-es 999-szer, az ebből adódó összeg 999. Vegyük hozzá az 1000-et is a számokhoz, mert annak az utolsó 3 jegye nem változtatja meg a számjegyek összegét. A százask, tízes, és egyes helyiértéken is minden számjegy pontosan 100-szor szerepel, hiszen a másik két számjegy bármi lehet, ami $10 \cdot 10 = 100$ lehetőség. Egy helyiértéken tehát a számjegyek összege

$$100 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 4500.$$

Számításba kell még vennünk a 2000 és 2013 közötti számok számjegyösszegét. Ennek értéke:

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 3 + 4 + 5 + 6 = 83.$$

Tehát $999 + 4500 + 4500 + 4500 + 83 = 14582$ a megfelelő számjegyösszeg.



Országos döntő

1. 9 kg mogyorót vásároltunk, kilogrammonként 1800 forintért. A mogyoró megtisztítása után – lemérve a kapott mogyoróbelet és héjat – megállapítottuk, hogy a mogyoróhéj súlya a mogyoróbél súlyának 2 harmadrésze. Mennyibe kerül a mogyoróbél kilogrammja?

Az össztömeg nem változott attól, hogy meghámoztuk a mogyorót. A mogyoróbél súlyát x -el jelölve kapjuk, hogy

$$x + \frac{2}{3} \cdot x = 9$$

Az egyenletet megoldva $x = \frac{27}{5}$ kg = 5,4 kg.

Tehát összesen $9 \cdot 1800$ forintot fizettünk 5,4 kg mogyoróbélért. Így egy kg mogyoróbél

$$\frac{9 \cdot 1800}{5,4} = \frac{9 \cdot 1800}{3 \cdot 1,8} = 3000 \text{ forintba kerül.}$$



2. 1-től 100-ig az egész számokat két színnel kiszíneztük: 74 számot pirosra, a maradék 26-ot kékre.

- a) Bizonyítsd be, hogy a pirosak összege nem lehetett egyenlő a kékék összegével!
b) Legfeljebb hány számot színezhettünk pirosra, ha a fenti két összeg megegyezett?

Az első száz szám összege $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. Ahhoz, hogy a két kupacban megegyezzen az összeg, az kell, hogy mindkét kupacban a számok összege 2525 legyen.

Ha a legkisebb 74 számot színezzük pirosra, már akkor is túllépünk az összegben. Ugyanis az első 74 szám összege $\frac{74 \cdot 75}{2} = 2775$. Tehát akármelyik 74 számot választjuk, ennél csak nagyobb lehet az összeg.

Kérdés, hogy melyik az a legkisebb szám, hogy annyi piros a fentiekhez hasonló érvelés miatt biztosan nem lehet. Az első 74 szám összege 250-nel lépte túl a 2525-öt, ezért ha 3 számmal

kevesebbet veszünk, még túllépjük az összeget, de ha csak 70-ig megyünk, már nem. Pontosabban

$$\frac{71 \cdot 72}{2} = 2556 > 2525, \quad \frac{70 \cdot 71}{2} = 2485 = 2525 - 40$$

Tehát 70 piros számot választva elérhető, hogy a két kupacban egyenlő legyen a számok összege, ehhez a legkisebb 70 szám összegét 40-nel kell növelni. Ez megtehető például úgy, hogy kiválasztjuk az első 68 számot, és még a 89, 90-et. 

3. Keressétek meg az összes olyan csupa különböző számjegyből álló háromjegyű számot, amelynek a számjegyeiből képezhető, különböző számjegyeket tartalmazó kétjegyű számok összege egyenlő az eredeti háromjegyű számmal!

Jelölje a háromjegyű számot $\overline{abc}$, ahol $a \neq 0$ és a, b, c különböző egyjegyű számok. Külön kell megvizsgálni azokat az eseteket, amikor valamelyik számjegy 0.

- 1. eset:** Ha egyik számjegy sem 0, akkor 6 különböző érvényes kétjegyű szám képezhető:

$$\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{bc}, \overline{cb}, \overline{ba}, \overline{ca}$$

Ezek összege

$$10a + b + 10a + c + 10b + c + 10c + b + 10b + a + 10c + a = 22(a + b + c)$$

Olyat keresünk, ahol ez az összeg egyenlő az eredeti háromjegyű számmal, azaz

$$22(a + b + c) = 100a + 10b + c$$

$$12b + 21c = 78a$$

$$4b + 7c = 26a$$

Ennek az egyenletnek keressük azokat a megoldásait, ahol a, b, c különböző nem 0 egyjegyű számok. $4b + 7c < 4 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 99 < 26 \cdot 4$, ezért a értéke 1, 2, vagy 3 lehet.

Ha $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ az egyetlen megoldás, ez jó. Ha $a = 2$, $b = 6$, $c = 4$ az egyetlen jó megoldás. Ha $a = 3$, $b = 9$, $c = 6$ az egyetlen jó megoldás.

- 2. eset:** Ha $b = 0$, akkor 4 különböző érvényes kétjegyű szám képezhető:

$$\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{cb}, \overline{ca}$$

$$21a + 21c = 100a + c$$

$$20c = 79a$$

Ennek nincsen megfelelő megoldása, mert a 79 prím, így csak úgy lehetne egyenlőség, ha c osztható 79-cel.

- 3. eset:** Ha $c = 0$, akkor 4 különböző érvényes kétjegyű szám képezhető:

$$\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{bc}, \overline{ba}$$

$$21a + 21b = 100a + 10b$$

$$11b = 79a$$

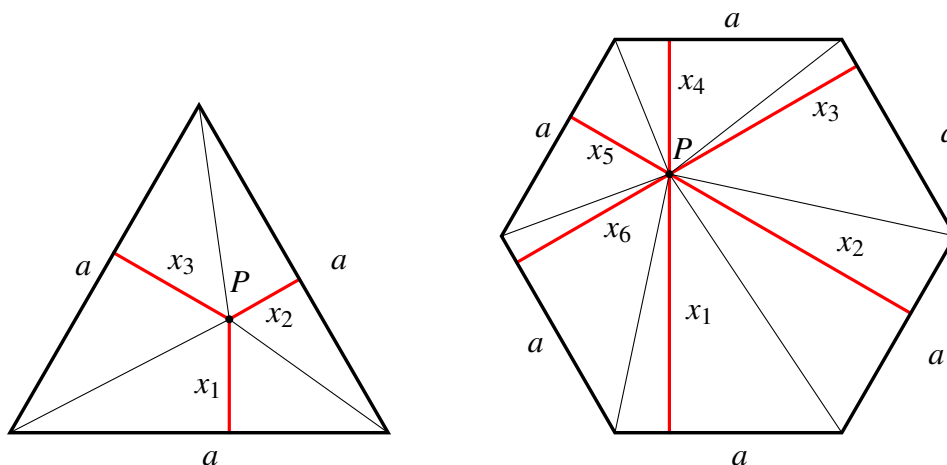
Ez hasonló okokból nem megoldható.

Tehát a megfelelő háromjegyű számok: 132, 264, 396.



4. Egy n oldalú szabályos sokszög oldalhossza legyen a , beírt körének sugara r . A sokszög belsejében felvettünk egy P belső pontot, amelyből merőlegeseket állítottunk a sokszög minden oldalának egyenesére. Igaz-e, hogy ezen merőleges szakaszok hosszának összege állandó? ($n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$)

Jelölje a merőleges szakaszok hosszát $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ha a P pontot összekötjük a sokszög csúcsaival, akkor a keletkező háromszögek területének összege éppen a sokszög területe, ami nem függ a P pont választásától. Jelölje ezt T_n .



Másrészt a kis háromszögeknek mind a az alapja, és az ehhez tartozó magasság éppen x_i . Így a sokszög területét a háromszögekből kiszámolva

$$T_n = \frac{ax_1}{2} + \frac{ax_2}{2} + \dots + \frac{ax_n}{2}$$

$$T_n = \frac{a}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\frac{2T_n}{a} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Tehát rögzített n esetén valóban állandó a szakaszok hosszának összege.



5. Számítsd ki 2013-nak azt a legkisebb többszörösét, amely 2014-re végződik!

Legyen $\overline{x_n \dots x_3 x_2 x_1}$ az a szám, amivel a 2013-at szorozzuk, x_i hátulról az i . helyen álló számjegy. A szorzat utolsó számjegyét $x_1 \cdot 3 = 4$ határozza meg, ezért x_1 csak 8 lehet. $8 \cdot 2013 = 16104$, ezért a szorzat utolsó előtti számjegyét $x_2 \cdot 3 + 0 = 1$ határozza meg, így x_2 csak 7 lehet.

$78 \cdot 2013 = 157014$, ezért $x_3 \cdot 3 + 0 = 0$ kell, hogy teljesüljön, így $x_3 = 0$. Ezzel nem változik a szorzat ismert része, $x_4 \cdot 3 + 7$ utolsó számjegye 2 kell, hogy legyen, így $x_4 = 5$. A további számjegyek nem befolyásolják, hogy a többszörös 2014-re végződik-e, csak növelik a többszöröst. Ezért $5078 \cdot 2013 = 10222014$ a legkisebb többszörös, ami 2014-re végződik.



Országos döntő

1. Bizonyítsd be, hogy 1-től 2013-ig minden természetes szám előállítható a 2000 néhány osztójának összegeként! (Minden osztót legfeljebb egyszer szabad felhasználni egy szám előállításánál.)

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$, 2000 összes osztója:

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000

Az 1, 2, 4, 8 számok segítségével előállítható minden szám 15-ig, tehát 9-ig is.

A 10, 20, 40, 80 számok segítségével minden tízzel osztható szám előállítható 150-ig, tehát 90-ig is. A 100, 200, 400, 500 számok segítségével minden százzal osztható szám előállítható 900-ig.

Tehát minden számot előállíthatunk, ha először az ezres helyiérték alapján vesszük az 1000-et, 2000-et, vagy semmit, majd külön beállítjuk a százask, tízesek, egyesek számát. Így minden osztót legfeljebb egyszer használunk fel. Például

$$1929 = 1000 + (500 + 400) + 20 + (8 + 1)$$



2. Három tanuló játékgolyókkal játszik. A golyókat a játék megkezdése előtt $7 : 6 : 5$ arányban osztották szét egymás között. Játékgolyóik számának aránya a játék végén a tanulók ugyanazon sorrendje szerint $6 : 5 : 4$. Valaki közülük 12 darab golyót nyert. Hány játékgolyót kaptak az egyes tanulók a játék megkezdése előtt?

Legyen a játékosoknak kezdetben $7x$, $6x$ illetve $5x$ darab játékgolyójuk. A játék végén pedig $6y$, $5y$ illetve $4y$. Összesen nem változott a golyók száma, ezért

$$(7 + 6 + 5)x = 18x = 15y = (6 + 5 + 4)y$$

$$6x = 5y$$

6 és 5 legkisebb közös többszöröse a 30, ezért

$$x = 5t, \quad y = 6t$$

a lehetséges megoldások, ahol t pozitív egész szám.

Az első játékosnak a játék elején $35t$, a végén $36t$ játékgolyója van. A másodiknak az elején $30t$, és a végén is $30t$. A harmadik játékosnak az elején $25t$, a végén $24t$.

Tehát csak az első játékos nyer, és ő t darab golyót nyer. Így $t = 12$, $x = 60$. Tehát az első játékos 420, a második 360, a harmadik 300 játékgolyót kapott a játék megkezdése előtt.



3. Egy „matematikus” kenguru a számegyenesen ugrál véletlenszerűen egyet jobbra vagy egyet balra tetszése szerint. Ugrásai 1 egységnyi hosszúak. Jelenleg a kezdőponton (nullán) áll és a 6-os ponton szeretne megpihenni, befejezni az ugrálást.

- a) Az egyik alkalommal 8 ugrással jutott el a 6-os pontba pihenni. Hányféleképpen tehette meg az utat?
- b) Egy másik alkalommal 10 ugrással jutott el a 6-os pontba pihenni. Hányféleképpen tehette meg az utat?

Jelölje a jobbra ugrások számát j , a balra ugrások számát b . Ahhoz, hogy a 6-os pontba érkezzen, az kell, hogy összesen 6-tal többször ugorjon jobbra, mint balra, mindegy, hogy ezt milyen sorrendben teszi.

Ha összesen nyolcat ugrik, $b + j = 8$, $b + 6 = j$, tehát hetet ugrik jobbra, egyet balra. A nyolc ugrásból nyolcféleképpen választhatja ki, hogy mikor ugrik balra, ez már az egész ugrássorozatot meghatározza egyértelműen. Tehát ebben az esetben nyolcféleképpen tehette meg az utat.

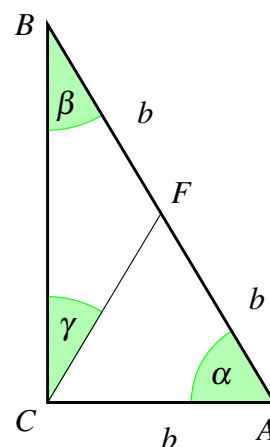
Ha összesen tízet ugrik, $b + j = 10$, $b + 6 = j$, tehát nyolcat ugrik jobbra, kettőt balra. $\frac{8 \cdot 7}{2}$ féleképpen választhatja ki, hogy melyik az a két alkalom, amikor balra ugrik. Tehát ebben az esetben 28-féleképpen tehette meg az utat. 

4. Egy háromszög legnagyobb oldala kétszerese a legrövidebbnek. A legnagyobb oldallal szemközi szög háromszorosa a legkisebb oldallal szemközt lévő szögnek. Hány fokal a háromszög legkisebb szöge?

Az ábrán látható módon legyen a háromszög legrövidebb oldalának hossza b , ekkor a leghosszabb oldala $2b$ hosszú, a felezőpont legyen F . A feltételek szerint $\gamma = 3\beta$. A háromszög szögeinek összege 180° , ezért $\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{4}$. F felezőpont, ezért a CAF háromszög egyenlőszárú, így $\angle ACF = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Így

$$\angle BCF = 180^\circ - \alpha - \left(\frac{180^\circ - \alpha}{4} \right) - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 45^\circ - \frac{\alpha}{4} = \beta.$$

Tehát a BFC háromszög is egyenlőszárú, $CF = b$. Így az ACF háromszög egyenlő oldalú, tehát $\alpha = 60^\circ$. Ekkor $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, tehát a háromszög legkisebb szöge 30° . 



5. Kovács úr egy évre bérbe akarja adni a házát. A hirdetményén a következő szöveg olvasható:

Ez a ház kiadó egy évre.
 $7 \cdot \text{HÁZBÉR} = 6 \cdot \text{BÉRHAZ}$

A bérleti díjat Kovács úr HÁZBÉR-nek írta. Minden betű más-más számjegyet jelöl, egyforma betűk egyforma számjegyeket. A felírt szorzás igaz. Mennyibe kerül a HÁZBÉR?

Jelöljük a HÁZ háromjegyű számot a -val, a BÉR háromjegyű számot b -vel. Ekkor

$$\begin{aligned} 7 \cdot (1000a + b) &= 6 \cdot (1000b + a) \\ 6994a &= 5993b \\ 2 \cdot 13 \cdot 269a &= 13 \cdot 461b \\ 2 \cdot 269a &= 461b \end{aligned}$$

A 269 és a 461 prímszámok, valamint 461 páratlan, ezért egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha a osztható 461-gyel, b osztható 2-vel és 269-cel, azaz 538-cal. De b háromjegyű szám, ezért csak $b = 538$ lehetséges, így $a = 461$.

Tehát HÁZBÉR = 461538, itt valóban különböző betűk különböző számokat jelölnek. 

1. Egyszer két juhász így beszélgetett:
- Adj nekem 8 bárányt, akkor nekem is annyi lesz, mint neked!
 - Inkább te add nekem a bárányaid felét, s akkor nekem 7-szer annyi lesz, mint neked.
- Hány báránya volt egyik-egyik juhásznak?

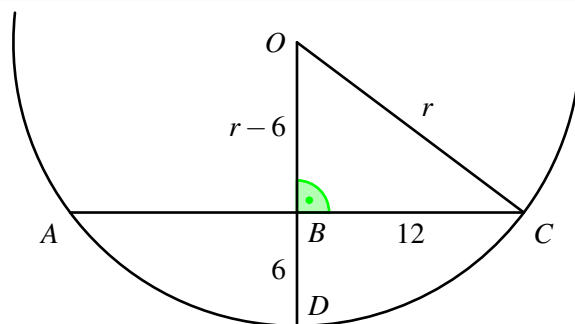
Az első állítás szerint 16 a különbség a két juhász bárányainak száma között, tehát (feltételezve, hogy a bárányok száma egész) páros sok bárány van összesen. A második állítás szerint ennél több is igaz. Ha $7 : 1$ arányban is el lehet osztani az állatokat, akkor 8-cal is osztható számuk. Legyen tehát összesen $8b$ bárány, ahol b pozitív egész. Az első feltétel szerint kezdetben $4b - 8$, $4b + 8$ volt a megoszlás, a második feltétel szerint pedig $7b = 4b + 8 + (4b - 8)/2$. Innen $7b = 6b + 4$, tehát $b = 4$, vagyis az egyik juhásznak 24, a másiknak 8 báránya volt. ↑

2. A tavon úszott egy labda, majd a tél beálltával befagyott a tó vize, s befagyott a labda. A labdát sikerült eltávolítani, így visszamaradt egy 24 cm átmérőjű, 6 cm mély „lyuk”. Mennyi a labda sugara? (Feltételezzük, hogy a labda gömb alakú, gumiból készült és belül üres! A labda középpontja a víz felszíne felett volt.)

Készítsünk ábrát! A „lyuk” átmérője az AC szakasznak, „mélysége” a BD szakasznak felel meg. Az OBC háromszögre felírt Pitagorasz-tételből

$$r^2 = (r - 6)^2 + 12^2.$$

A négyzetre emelések elvégzése után $r^2 = r^2 - 12r + 36 + 144$, innen $12r = 180$, vagyis $r = 15$. Tehát a labda sugara 15 cm. ↑

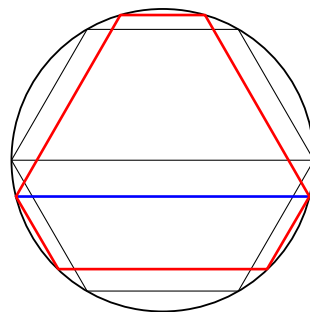
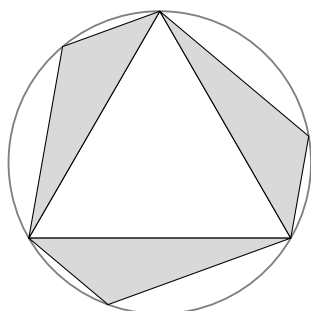


3. Egy körbe írható hatszögnek 6 darab 120° -os szöge van. Következik-e ebből, hogy a sokszög szabályos?

Nem következik. Megadunk egy ellenpéldát. Rajzoljunk a körbe egy szabályos hatszöget (az ábrán fekete). Ezután húzzunk párhuzamos húrt (kék) a szabályos hatszög valamelyik átmérőjével. Ennek a húrnak a végpontjaiban mérjük fel a húr mindkét oldalán 60° -ot, és a kapott félegyenéseket (piros) a körig hosszabbítsuk meg. (Ha jól vettük fel a kék húrt, akkor a félegyenések a körön belül nem metszik egymást.) Így két szimmetrikus trapéz keletkezik, mindkettő szögei: $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$.

A piros hatszög minden belső szöge 120° -os, de nem szabályos, nem minden oldala egyenlő.

Második megoldás: Egy szabályos háromszög oldalaira az ábrán látható módon egybevágó 120° -os háromszögeket rajzolunk. Könnyen látható, hogy az adódó hatszög minden belső szöge 120° -os, de nem szabályos. ↑



4. Dudley Langford skót matematikus tiszteletére nevezzük DudLa számoknak azokat a számokat, amelyeknek minden számjegye legalább kétszer szerepel a számban, és az is igaz, hogy bármely két ugyanolyan értékű számjegy között annyi darab más értékű számjegy áll, mint amennyi azok értéke. Például ilyen DudLa szám a 723121327, mert két 1-es között 1 db, két 2-es között 2 db, két 3-as között 3 db, két 7-es között 7 db töle különböző értékű számjegy áll. Ebben a számban 3 darab 2-es van, a két szélső kettesre nem vonatkozik a szabály!
Melyek a hétjegyű DudLa számok?

Első megoldás: A legnagyobb számjegy, ami szerepelhet egy hétjegyű DudLa számban, az ötös, hiszen két ötös között van öt másik jegy és így megvan az összesen hét számjegy. Ráadásul ha szerepel két ötös a DudLa számban, akkor csak az első és utolsó helyen szerepelhet. Aszerint fogjuk csoportosítani a lehetséges megoldásokat, hogy melyik a legnagyobb előforduló számjegy.

a) A legnagyobb jegy 5. A szám alakja: 5____5.

A fentihez hasonló módon a második jegy legfeljebb 3. Ha 3, akkor csak így nézhet ki a szám: 53____35. Ekkor a középső három jegy kötelezően 0, mert feltétel, hogy minden jegy legalább kétszer szerepel. Első megoldásunk az 5300035. Ha az első 5-ös után 3-nál kisebb jegyet szeretnénk írni, akkor hamar kiderül, hogy az 1 és a 2 nem jó, mert az 51_1__5 és az 52__2_5 nem fejezhető be, hiszen a két 1-es, illetve a két 2-es közé nem tudunk megfelelő számot írni. A 0 viszont ad egy új megoldást: 5000005.

b) A legnagyobb jegy 4. A szám alakja: 4____4_ vagy _4____4.

Elég az első esetet megoldani, a második szimmetrikus párja ennek, mert egy „magányos” nulla nem állhat a szám végén, a feltételek miatt. A 3, 2, 1 jegyeket a szám végére próbálva egyedül az utolsó esetben kapunk megoldást: 4000141. A 4_3__43 és a 4__2_42 nem fejezhető be. Tehát ebben az esetben két megoldást kaptunk: 4000141 és 1410004.

c) A legnagyobb jegy 3. A szám alakja: 3__3__ vagy _3__3_ vagy __3__3.

Itt három megoldást kapunk, mindegyik a középső elrendezésből jön ki: 2312132, 1312132, 2312131.

d) A legnagyobb jegy 2.

Ilyen megoldás nincs, mert a két 2-es közé csak nullák férnek, de nullákból csak egyetlen „blokk” lehet, így a ?2002? nem fejezhető be.

A hétjegyű DudLa számok tehát a következők: 5000005, 5300035, 4000141, 1410004, 2312132, 1312132, 2312131.

Második megoldás: Mivel minden jegy legalább kétszer szerepel, lesz olyan, amelyik háromszor is, mert összesen páratlan sok (hét) jegy van. Valójában vagy pontosan háromszor, vagy pontosan ötször fordul elő, mert minden jegy nem lehet nulla, így csak a következő darabszám eloszlások lehetségesek: 5-2, 4-3, 3-2-2. Ezek közül a 4-3 nem valósul meg, mert csak a nullák lehetnek szomszédosak.

Felhasználjuk azt is, hogy a leggyakoribb jegy értéke csak 0, 1 vagy 2 lehet, hiszen 3__3__3 több, mint hét hegyű.

Csoportosíthatjuk tehát eseteinket a legtöbbször előforduló jegy értéke szerint. A következőket kell vizsgálnunk:

2__2__2,

1_1_1__ vagy _1_1_1_ vagy __1_1_1,

_000__ vagy __000__ vagy _00000_ vagy ___000_ vagy ____000.

Innen rendre a következő megoldásokat kapjuk:

2312132,
1312132 és 2312131,
4000141 és 5000005 és 5300035 és 1410004.

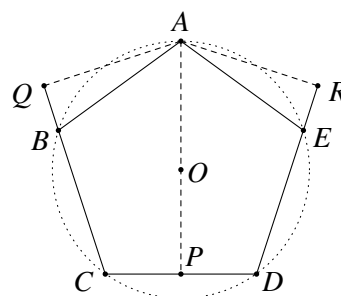


5. Az $ABCDE$ szabályos ötszög. Az A csúsból állítsunk merőlegeseket a BC , CD és DE oldalak egyenesére. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre Q , P és R . Legyen O az ötszög köré írható kör középpontja. Ha $OP = 1$, akkor mivel egyenlő $AO + AQ + AR$?

Legyen a szabályos ötszög oldalának hossza h . Az O pont szabályos sokszög esetében a beírt kötnék is középpontja, vagyis $OP = 1$ a beírt kör sugara, így O az ötszög oldalaitól egységnyi távolságra van.

Az ötszög területét fogjuk felírni kétféle módon, és ebből kapunk egy egyenletet a kérdéses összeg meghatározásához.

$$T = T_{OAB} + T_{OBC} + T_{OCD} + T_{ODE} + T_{OEA} = T_{ABC} + T_{ACD} + T_{ADE}$$



Az első felírásban szereplő háromszögek h hosszú oldalához egységnyi magasság tartozik, hiszen előbb láttuk, hogy O mindegyik oldalegyenestől egységnyi távol van. A második felírásban a háromszögek h -hoz tartozó magasságai rendre: AQ , $AP = AO + 1$, AR . Egyenletünk így alakul:

$$5 \cdot \frac{h \cdot 1}{2} = \frac{h \cdot AQ}{2} + \frac{h \cdot (AO + 1)}{2} + \frac{h \cdot AR}{2}$$

A törteteket eltüntetve és $h \neq 0$ -val egyszerűsítve:

$$5 = AQ + (AO + 1) + AR, \text{ vagyis } 4 = AQ + AO + AR$$

Tehát $AQ + AO + AR = 4$.



Országos döntő

1. Bontsd fel a 13157-et négy szám összegére úgy, hogy ha az első részhez 2-t hozzáadunk, a második részből 3-at elveszünk, a harmadik részt 7-tel megszorozzuk, a negyedik részt 11-gyel elosztjuk, akkor mindig ugyanazt a számot kapjuk!

Ha x jelöli az említett műveletek elvégzése után kapott közös értéket, akkor

$$13157 = (x - 2) + (x + 3) + \left(\frac{x}{7}\right) + (x \cdot 11).$$

Összevonás után: $13156 = \left(13 + \frac{1}{7}\right)x = \frac{92x}{7}$, tehát $x = \frac{7 \cdot 13156}{92} = 1001$.

A felbontás tehát a következő: $13157 = 999 + 1004 + 143 + 11011$.



2. Egy tíz résztvevős asztalitenisz versenyen mindenki pontosan egyszer mérkőzött mindenki-vel. Az egyes versenyzők győzelmeinek száma $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ vereségeinek száma rendre $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Bizonyítsd be, hogy a versenyzők által szerzett győzelmek száma négyzetének összege ugyanannyi, mint a vereségek száma négyzetének összege.

Az asztaliteniszben nincs döntetlen, ezért $A = 9 - a, B = 9 - b, \dots, J = 9 - j$, hiszen mindenki pontosan 9 mérkőzésen vett részt. A bizonyítandó állítás tehát így írható:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 + j^2 &= \\ &= (9-a)^2 + (9-b)^2 + (9-c)^2 + (9-d)^2 + (9-e)^2 + (9-f)^2 + (9-g)^2 + (9-h)^2 + (9-i)^2 + (9-j)^2. \end{aligned}$$

A zárójelek felbontása és a négyzetes tagok kiejtése után így alakul az állítás:

$$18 \cdot (a + b + c + d + e + f + g + h + i + j) = 10 \cdot 81 = 810,$$

vagyis

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 45.$$

Ez pedig igaz, mert mind a $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ mérkőzésen pontosan egy győzelem született (valamelyik játékos nyert).



3. Keress olyan prímszámokat, amelyekre igaz, hogy alkalmas számrendszerben felírva a számrendszer minden számjegyét pontosan egyszer használjuk fel! (0 nem állhat elől.) Igazold, hogy a hetes, illetve a tízes számrendszerben nincs ilyen szám.

Kezdjünk el kísérletezni! Kettes és hármas számrendszerben gyorsan ellenőrizhető az összes lehetőség és a következő megoldásokat találjuk: $10_2 = 2, 102_3 = 11, 201_3 = 19$.

Négyes számrendszerben nem írhatunk páros jegyet (0, 2) a szám végére, mert akkor egy 2-nél nagyobb páros számot kapnánk, hiszen az utolsó jegy kivételével minden jegy helyértéke páros (négy hatványa). Mivel 0-val nem kezdődhet a szám, összesen nyolc lehetőség marad: $2301_4, 3201_4, 2031_4, 3021_4, 2103_4, 1203_4, 2013_4, 1023_4$. Ezek értéke tízes számrendszerben rendre: 177, 225, 141, 201, 147, 99, 135, 75. A felsoroltak egyike sem prím, például azért nem, mert mindegyik osztható hárommal.

Ha jobban belegondolunk, ehhez a felfedezéshez elég lett volna egy számot megnézni, például: $3 \mid 2301_4 = 177$. Ugyanis a 2301_4 számból kiindulva eljuthatunk a többi csupa különböző jegyből álló számhoz számjegy párok felcserélésével. (Általában n különböző dolog összes sorrendje előállítható úgy, hogy egy lépésben mindig két elemet cserélünk ki.) Mivel a helyértékek (1, 4, 16, 64) mindegyike egy maradékot ad hárommal osztva, ezért az a és b jegyek felcserélésekor nem változik a hárommal vett osztási maradék ($a + b = b + a$). Több is igaz: a hárommal vett osztási maradék egyenlő a számjegyek összegének hármas maradékával. Ez utóbbi állítás a „cserélgetős” érvelés nélkül is igazolható: $64a + 16b + 4c + d - (a + b + c + d) = 63a + 15b + 3c$ osztható hárommal. Tehát négyes számrendszerben nem kapunk prímet.

Az előző gondolatmenet lényegében változtatás nélkül alkalmazható hetes és tízes számrendszerben is (illetve minden olyan esetben, amikor a számrendszer alapszáma egy maradékot ad hárommal osztva). Hetesben $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, tízesben $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, mindkét összeg osztható hárommal, ezért ezekben a számrendszerekben csak hárommal osztható (és háromnál nagyobb) számokat tudunk előállítani, így egyik sem lesz prím.

Általánosítás. Megmutatható, hogy a 2, 11, 19 prímeken kívül nincs olyan prím, aminek alkalmas számrendszerben felírt alakjában a számrendszer összes jegye pontosan egyszer szerepel.

Legyen a számrendszer alapja $n > 3$.

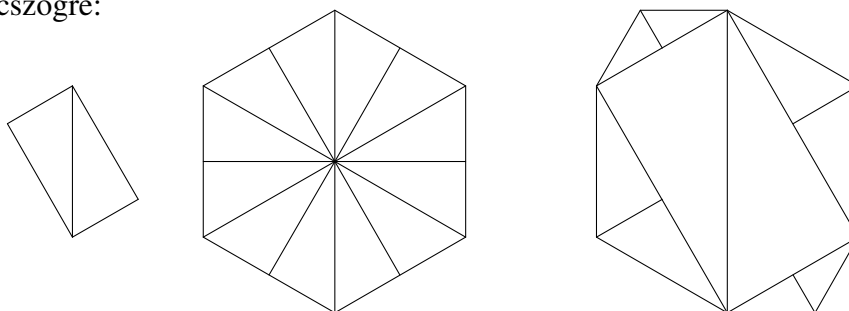
- Ha n páros, akkor a feltételnek megfelelő számok mind oszthatók $(n-1)$ -gyel. Az n hatványai 1 maradékot adnak $(n-1)$ -gyel osztva, ezért elég megmutatni, hogy az $1, 2, \dots, n-1$ jegyek összege osztható $(n-1)$ -gyel. Ez pedig igaz, mert $1 + 2 + 3 + \dots + n-1 = \frac{(n-1) \cdot n}{2} = (n-1) \cdot (n/2)$, és a második tényező egész, ha n páros. $n > 3$ esetén a vizsgált számok mind nagyobbak $(n-1)$ -nél, tehát nem lehetnek prímek, ha oszthatók $(n-1)$ -gyel, ami 2-nél nagyobb.
- Ha $n = 2k + 1$ páratlan, akkor minden helyérték 1 maradékot ad k -val osztva. Megmutatjuk, hogy a különböző jegyekkel felírható számok k -val oszthatók. Az előzőekhez hasonlóan elegendő belátni, hogy a számjegyösszeg osztható k -val. Ez pedig igaz, mert $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{(2k) \cdot (2k+1)}{2} = k \cdot (2k+1)$. $n > 3$ esetén $k > 1$, tehát egy valódi osztót találtunk.

Azt pedig korábban láttuk, hogy $n \leq 3$ esetén három megoldás van: $10_2 = 2, 10_3 = 11, 201_3 = 19$.



4. Legfeljebb hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak?
(Megjegyzés: a feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem.)

Kis oldalszámok esetén könnyen találhatunk megfelelő feldarabolásokat. Példa négyszögre, hatszögre és nyolcszögre:



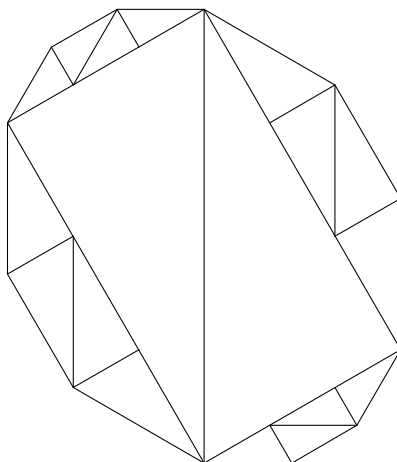
A feltétel miatt csak olyan sokszögek jöhetnek szóba, amelyeknek minden belső szöge (fokokban mérve) 30 egész számú többszöröse, hiszen a felbontásban szereplő háromszögek is ilyenek. Mivel konvex sokszögről van szó, egy belső szög legfeljebb 150° lehet.

Ha nincs 150° -nál nagyobb belső szög, akkor a belső szögek átlaga sem lehet nagyobb 150° -nál.

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \leq 150^\circ$$

Átrendezve: $180n - 360 \leq 150n \Leftrightarrow 30n \leq 360 \Leftrightarrow n \leq 12$

Azt kaptuk, hogy legfeljebb 12 oldalú lehet a keresett sokszög. Ez lehetséges is, például így:



5. Bizonyítsd be, hogy minden természetes szám előállítható $a^2 + b^2 - c^2$ alakban, ahol a, b, c egész számok!

Először a páratlan számokat állítjuk elő. Legyen $n = 2k + 1$. Emlékezhetünk rá, hogy a szomszédos négyzetszámok különbségének sorozata éppen a páratlan számok sorozata, innen adódik az előállítás:

$$n = 2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 \Rightarrow a = 0, b = k + 1, c = k.$$

Ha pedig páros számot kell előállítanunk, akkor egyszerűen hozzáadunk egyet az eggyel kisebb páratlan szám előállításához:

$$n = 2k + 2 = 1 + (k + 1)^2 - k^2 = 1 + (k^2 + 2k + 1) - k^2 \Rightarrow a = 1, b = k + 1, c = k.$$

Az első néhány természetes szám felírása: $1 = 0^2 + 1^2 - 0^2$, $2 = 1^2 + 1^2 - 0^2$, $3 = 0^2 + 2^2 - 1^2$, $4 = 1^2 + 2^2 - 1^2$, $5 = 0^2 + 3^2 - 2^2, \dots$



EREDMÉNYEK

XXXVII. verseny 2007–08

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Goór Vanessza	Ságvári Endre Általános Iskola Oroszlány	Huma Erzsébet Goór Csaba	54
2	Szemán Krisztián	Jókai Mór Általános Iskola Nyíregyháza	Durda Marosszéki Ágnes Gábor Béla	49
3	Varga Gábor	Dobó Katalin Gimnázium Esztergom	Takács Anikó	48
4	Bulátkó Anna	Móricz Zsigmond Általános Iskola Nyíregyháza	Ajler Erika Kallós Béla	45
5	Fekete Panna	Deák Ferenc Gyakorló Iskola Pécs	Lovas Zoltán	43
6-8	Laskay Katalin	Móricz Zsigmond Általános Iskola Nyíregyháza	Ajler Erika Kallós Béla	40
6-8	Nemes György	Dienes Valéria Általános Iskola Szekszárd	Enyediné Szakálas Mariann	40
6-8	Trepess Beatrix	Batthyány Lajos Gimnázium Nagykanizsa	Lábodi Gyöngyi	40
9-10	Talyigás Gergely	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Rubóczki György	39
9-10	Tamás Ambrus	József Attila Általános Iskola Esztergom	Makovicsné Szabó Márta	39

XXXVII. verseny 2007–08

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Homonnay Bálint	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Jakucs Erika	53
2	Láposi Viktória	Móricz Zsigmond Általános Iskola Nyíregyháza	Vassné Oláh Csilla	48
3	Németh Gergely	Gregor József Általános Iskola Budapest	Márton Katalin	47
4	Tőri Tünde	Angol Tagozatos Iskola Budapest	Somogyváriné Polgár Zsuzsanna	46
5	Maga Balázs	Apáczai Csere János Gyakorló Ált. Isk. Nyíregyháza	Dr. Kanyuk Gincsei Tóth Jánosné Tibor Imre	45
6	Tossenberger Tamás	Szilágyi Endre Gimnázium Budapest	Horváth Eszter	42
7-9	Csépke Péter	Vári Emil Társulások Általános Iskola Kisvárd	Szemjánné Jászai Gabriella	41
7-9	Majoros Péter	Jókai Mór Általános Iskola Pécs	Bere Gyöngyi	41
7-9	Tóth Pál Gábor	Zrínyi Ilona Általános Iskola Kecskemét	Gálné Csordásné Szalontai Mária Szécsi Jolán	41
10	Kabos Eszter	Áldás utcai Általános Iskola Budapest	Herbert Mária	40

XXXVII. verseny 2007–08

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Janzer Olivér	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Rubóczki György	62
2	Nagy Róbert	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Rubóczki György	61
3	Varga Imre Károly	Hermann Ottó Gimnázium Miskolc	Gulyásné Nemes Katalin	60
4-5	Csuka Róbert	Baár-Madaras Református Gimnázium Budapest	Nagy-Baló András	59
4-5	Szabó Attila	Mecsekaljai Iskola Pécs	Németh Norbertné	59
6-8	Reiter Anna	Katona József Gimnázium Kecskemét	Nagyné Viszmez Edit Csordásné Szécsi Jolán	58
6-8	Tóth Emese Anna	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Rubóczki György	58
6-8	Zilahy Tamás	Móricz Zsigmond Általános Iskola Nyíregyháza	Dr. Kiss Sándor Bodnárné Kerekei Ágnes	58
9	Kovács Áron	Kodály Zoltán Általános Iskola Nyíregyháza	Pécskai Tamásné Dr. Kiss Sándor Pósa Lajos	57
10	Weisz Gellért	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Rubóczki György	52

XXXVII. verseny 2007–08

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Ágoston Tamás	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Pósa Lajos	63
2	Bunth Gergely	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Belezay Ferenc	59
3	Strenner Péter	Teleki Blanka Gimnázium és Ált. Isk. Székesfehérvár	Ponáczné Csuti Márta Buday Endre	56
4	Nguyen Noémi	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta	55
5	Kovács Nóra	Vári Emil Általános Iskola Kisvárd	Csapó Lászlóné	50
6	Beke Lilla	Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen	Dr. Gaál Istvánné Tóth Mariann	49
7	Kiss Melinda Flóra	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Belezay Ferenc	48
8-9	Gyarmati Máté	Deák Ferenc Általános Iskola és Gimn. Pécs	Lovas Zoltán Gyarmati István	46
8-9	Marussy Kristóf	Szent István Gimnázium Budapest	Juhász István	46
10	Kovalcsik Anna	Balassi Bálint Gimnázium Balassagyarmat	Hegedűs Csaba	42

XXXVIII. verseny 2008–09

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Nagy Kartal	Kossuth Lajos Általános Iskola Veszprém	Nagyné Czaun Mariann	48
2	Csikós Dominik	Nagyasszonyunk Katolikus Intézmény Kalocsa	Korsós Lajosné	46
3	Szebellédi Márton	Bányai Júlia Gimnázium Kecskemét	Brenyó Mihályné Badó Zsolt	44
4-5	Nguyen Shannon	Radnóti Miklós Gimnázium Budapest	Kornai Júlia	41
4-5	Tímár Zsuzsanna	Lengyel József Gimnázium Oroszlány	Csőre Imréné	41
6	Szabó Eszter	Apáczai Csere János Általános Iskola Nyíregyháza	Bodnár Mihály	40
7	Sal Kristóf	Koch Valéria Általános Iskola Pécs	Háhn Attila	39
8-9	Juhász Dániel	Damjanich János Általános Iskola Szentés	Horváth Józsefné	38
8-9	Túri Sára	Deák Ferenc Gyakorló Általános Iskola Pécs	Vinczné Csete Gabriella	38
10	Garát Péter Zsombor	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Jakucs Erika	36

XXXVIII. verseny 2008–09

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Khayouti Sára	Erkel Ferenc Általános Iskola Budapest	Halász Péter	51
2	Leitereg Miklós	Barcsay Általános Iskola Szentendre	Tóthné Vojtek Éva	49
3	Holczer Viktor	Jedlik Ányos Gimnázium Budapest	Árváné Doba Mária	46
4	Kovács Bálint	Radnóti Miklós Gimnázium Budapest	Kornai Júlia	40
5-6	Vu Lien Viola	Jedlik Ányos Gimnázium Budapest	Árváné Doba Mária	39
5-6	Mészáros Gabriella	Általános és Zeneiskola Kemence	Gulyás Gertrúd Mészáros Gáborné	39
7	Burian Lóránt	Budenz József Ált. Isk. Budapest	Csányi Erzsébet	38
8	Goór Vanessza	Ságvári Endre Ált. Isk. Oroszlány	Huma Erzsébet Goór Csaba	35
9-10	Budai Blanka	Kempelen Farkas Gimnázium Budapest	Nagy Emese	33
9-10	Berényi Balázs	Szent Erzsébet Kat. Ált. Isk. Szentés	Papp Mária	33

XXXVIII. verseny 2008–09

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Ágoston Péter	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Haskó Pósa Vincze Márta András Lajos	62
2	Németh Gergely	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Rubóczki György	60
3	Maga Balázs	Apáczai Csere János Gyakorló Ált. Isk. Nyíregyháza	Dr. Kanyuk Gincsei Pósa L. Jánosné Tibor Steller G.	54
4	Varga Dániel	Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen	Remeténé Orvos Viola Lakatos Tibor	49
5	Tossenberger Tamás	Szilágyi Erzsébet Gimnázium Budapest	Dr. Horváth Eszter	47
6-9	Dobra Gábor	Gyakorló Általános Iskola Pécs	Schöberné Kozma Márta	46
6-9	Halácsy Gergely	Árpád Gimnázium Budapest	Meszlényiné Róka Ágnes Számadó László	46
6-9	Tar Benjámin	Bethlen Gábor Ált. Isk. Nyíregyháza	Pappné Turik Tímea	46
6-9	Tran Duy An	Radnóti Miklós Gimnázium Budapest	Morvai Éva	46
10	Leipold Péter	Jedlik Ányos Gimnázium Budapest	Árváné Doba Mária Pósa Lajos	45

XXXVIII. verseny 2008–09

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Szabó Attila	Pázmány Péter utcai Ált. Isk. Pécs	Németh Norbertné Pósa Lajos	62
2	Nagy Róbert	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Rubóczki György	61
3	Tóth Emese Anna	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Rubóczki György	58
4	Csuka Róbert	Baár-Madaras Református Gimnázium Budapest	Nagy-Baló András	57
5-6	Janzer Olivér	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Rubóczki György	56
5-6	Sipos Ágoston	Árpád Gimnázium Tatabánya	Kovácsné Schandl Ágnes	56
7-8	Varnyú József	Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen	Balázs Tivadar Kovács Péter	52
7-8	Fodor András	Árpád Gimnázium Budapest	Besenyőné Titter Beáta Vajda István	52
9	Zilahy Tamás	Móricz Zsigmond Ált. Isk. Nyíregyháza	Bodnárné Kerekes Ágnes	43
10-11	Szkupien Bence	Szent István Gimnázium Budapest	Halek Tamás	42
10-11	Kalocsai Ákos	Szandaszőlősi Ált. Isk. Szolnok	Kiss József Kalocsai Ferenc	42

XXXIX. verseny 2009–10

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Williams Kada	SzTE Ságvári E. Gyakorló Általános Isk. Szeged	Dicsházi Attila	54
2	Baran Zsuzsanna	Arany János Gyakorló Általános Iskola Debrecen	Dr. Szabóné Zavaczki Andrea	54
3	Kovács Bence	Gárdonyi Géza Általános Iskola és Óvoda Győr	Turner László	54
4	Fekete Gábor	SzTE Ságvári E. Gyakorló Általános Isk. Szeged	Vincze Istvánné	53
5	Borbényi Márton	Kisfaludy u. Általános Iskola Kaposvár	Agócsné Horváth Andrea	53
6-8	Lajkó Kálmán	Juhász Gyula Általános Iskola Szeged	Konfár László	52
6-8	Nguyen Hai Yen	ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Ált. Isk. Budapest	Steller Gábor	52
6-8	Radnai Bálint	Rákóczi Telepi Tagiskola Várpalota	Gerstmárné Takács Beatrix	52
9-10	Kovács Péter Tamás	Zrínyi Miklós Gimnázium Zalaegerszeg	Pálovicsné Tusnády Katalin	51
9-10	Péterffy Orsolya	Ciszteri Nevelési Központ Pécs	Schrottne Fáy Tímea	51

XXXIX. verseny 2009–10

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1-2	Csikós Dominik	Nagyasszonyunk Katolikus Intézmény Kalocsa	Korsós Lajosné	56
1-2	Nagy Kartal	Kossuth Lajos Általános Iskola Veszprém	Nagyné Czaun Mariann	56
3-4	Horváth Hanga	Álmos Vezér Gimnázium és Ált. Isk. Budapest	Rényi Péter Horváth Sándor	55
3-4	Tóth Marcell	ELTE Radnóti Miklós Gimnázium Budapest	Lövey Éva Szokolai Tibor	55
5-7	Körmöczy Márk	Református Általános Iskola Kecskemét	Nagy Tibor Brenyó Mihály	54
5-7	Sal Kristóf	Koch Valéria Általános Iskola Pécs	Háhn Attila	54
5-7	Szabó Barnabás	Áldás u. Általános Iskola Budapest	Rudolf Tamásné	54
8	Szebellédi Márton	Bányai Júlia Gimnázium Kecskemét	Brenyó Mihályné Badó Zsolt	53
9-10	Horváth Ákos	II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola Paks	Zántóné Sélley Katalin	52
9-10	Major András	Veres Péter Gimnázium Budapest	Márton Gábor Burian Hana	52

XXXIX. verseny 2009–10

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1-2	Janzer Barnabás	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazekas Tünde	63
1-2	Jenei Adrienn	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazekas Tünde Rubóczky György	63
3	Khayouti Sára	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Rubóczky György	62
4-5	Burián Lóránt	Városmajori Gimnázium Budapest	Volf Annamária Burian Hana Pósa Lajos	61
4-5	Fehér Zsombor	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazekas Tünde	61
6	Volford András	Radnóti Miklós Gimnázium Szeged	Ábrahám Gábor	57
7	Schwarz Tamás	Berzsenyi Dániel Gimnázium Budapest	Gál Györgyné Gramá Virág Hubert Györgyné	55
8	Tóth Mátyás	Zrínyi Miklós Általános Iskola Szombathely	Bartalis Istvánné	53
9	Bíró János	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazekas Tünde	52
10	Nagy Gergely	Révai Miklós Gimnázium Győr	Árki Tamás	50

XXXIX. verseny 2009–10

	Név	Iskola	Tanárok	Pont
1	Kabos Eszter	Áldás u. Általános Iskola Budapest	Herbert Mária	57
2	Halácsy Gergely	Árpád Gimnázium Budapest	Meszlényiné Róka Ágnes Számadó László	53
3	Ágoston Péter	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Hraskó András Pósa Lajos	52
4	Majoros Péter	Jókai Mór Általános Iskola Pécs	Bere Gyöngyi	47
5	Maga Balázs	Apáczai Csere János Gyakorló Ált. Isk. Nyíregyháza	Dr. Kanyuk Jánosné Gincsei Tibor Pósa L. Steller G.	43
6	Bozsik Márton	Radnóti Miklós Gyakorló Isk. és Gimn. Budapest	Csatár Katalin Pósa Lajos Gulyás János	41
7	Mogyorósi Ferenc	Nagyszombatasszony Római Kat. Gimn. Zimány	Witzlné Horváth A.	38
8	Tran Duy An	Radnóti Miklós Gyakorló Isk. és Gimn. Budapest	Morvai Éva	33
9-10	Ijjas Mihály	Radnóti Miklós Gyakorló Isk. és Gimn. Budapest	Morvai Éva	32
9-10	Tossenberger Tamás	Szilágyi Erzsébet Gimnázium Budapest	Dr. Horváth Eszter	32

XL. verseny 2010–11

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Lakatos Ádám	Áldás utcai Általános Iskola Budapest	Kruchió Mária	56
2	Ótott Péter	SzTE Juhász Gyula Ált. Iskola Szeged	Árvainé Libor Ildikó	55
3	Gáspár Attila	Ádám Jen. Általános Iskola Kazincbarcika	Molnár Anna	54
4	Szép Ábris	Belvárosi Általános Iskola Békéscsaba	Bíró Jánosné	53
5	Papp Bence	Bornemissza P. Gimn. és Ált. Iskola Budapest	Szabó Imre	51
6	Cseh Viktor	Teleki Blanka Gimnázium Székesfehérvár	Bognárné Vajda Katalin	50
7	Kulcsár Gergő	Apáczai Csere János Gyak. Ált. Isk. Nyíregyháza	Gát Györgyné Dr. Kiss Sándor	49
8-10	Kórodi Balázs	ELTE Radnóti M. Gyakorló Gimn. Budapest	Steller Gábor	48
8-10	Szemerédi Levente	Bonifert D. Általános Iskola Szeged	Györe Mihályné	48
8-10	Villányi Soma	Kazinczy Ferenc Gimnázium Győr	Sulyekné Jancsó Judit	48

XL. verseny 2010–11

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Radnai Bálint	Rákóczi Telepi Tagiskola Várpalota	Gerstmárné Takács Beatrix	55
2	Lajkó Kálmán	SzTE Juhász Gyula Gyak. Ált. Iskola Szeged	Konfár László	54
3	Lendvai Péter	Paragvári Utcai Általános Iskola Szombathely	Ágoston Mária	53
4	Baran Zsuzsanna	Arany János Gyakorló Ált. Isk. Debrecen	Dr. Szabóné Zavaczki Andrea Pósa Lajos	52
5	Gerliczky Bence	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Jakucs Erika	51
6	Kovács Bence	Gárdonyi Géza Ált. Isk. és Óvoda Győr	Turner László	50
7-8	Almási Nóra	Arany János Gyak. Ált. Iskola Debrecen	Dr. Szabóné Zavaczki Andrea Pósa Lajos	46
7-8	Tóth Viktor	Kodály Zoltán Közp. Ált. Isk. Kaposvár	Sovány Józsefné Pósa Lajos	46
9-10	Borbényi Márton	Kisfaludy u. Tagiskola Kaposvár	Agócsné Horváth Andrea	44
9-10	Kovács Péter Tamás	Zrínyi Miklós Gimnázium Zalaegerszeg	Pálovicsné Tusnády Katalin	44

XL. verseny 2010–11

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Szabó Barnabás	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Gyenes Zoltán	63
2	Sal Kristóf	Koch Valéria Általános Iskola Pécs	Háhn Attila	60
3	Szebellédi Márton	Bányai Júlia Gimnázium Kecskemét	Pósa Varga Csordás Lajos József Mihály	58
4	Gyulai-Nagy Szuzina	Radnóti Miklós Gimnázium Szeged	Ábrahám Gábor Tigyi István	55
5-6	Nagy Kartal	Kossuth Lajos Általános Isk. Veszprém	Nagyné Czaun Marianna	52
5-6	Szabó Eszter	Krúdy Gyula Gimnázium Nyíregyháza	Katonáné Végh Lajosné Cserepes Mária Leona Éva	52
7-8	Major András	Veres Péter Gimnázium Budapest	Márton Gábor Számadóné Békéssy Szilvia	50
7-8	Regős Krisztina	Radnóti Miklós Gimnázium Szeged	Ábrahám Gábor Tigyi István	50
9	Vu Mai Phuong	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Gyenes Zoltán	47
10	Kovács Dávid	Szent István Gimnázium Budapest	Juhász István	45

XL. verseny 2010–11

	Név	Iskola	Tanárok	Pont
1	Holczer András	Kanizsai Dorottya Általános Iskola Siklós	Heidfogelné Seregélyes Edit	62
2	Janzer Barnabás	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazakas Tünde Pósa Lajos	58
3	Tulassay Zsolt	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Rubóczky György	57
4	Fehér Zsombor	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazakas Tünde	56
5	Almási Péter	Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen	Remeténé Balázs Pósa Orvos Viola Tivadar Lajos	53
6	Schwarz Tamás	Berzsenyi Dániel Gimnázium Budapest	Gál Györgyné Nemcskó István	52
7	Jenei Adrienn	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazakas Tünde Pósa Lajos	51
8	Weisz Ambrus	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Rubóczky György	50
9-10	Babik Bálint	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Fazakas Tünde Rubóczky György	47
9-10	Talyigás Gergely	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Rubóczky György	47

XLI. verseny 2011–12

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Kerekes Anna	Hajós Alfréd Kéttan. Nyelv. Ált. Isk. Budapest	Sztanó Zsuzsanna	49
2	Mészáros Anna	Eötvös József Általános Iskola Budapest	Vincze Imréné	47
3	Szabó Blanka	Eötvös J. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. Nyíregyháza	Róka Sándor Róka Sándorné	46
4	Gréczi Gergely	Veres Péter Gimnázium Budapest	Számadóné Békéssy Szilvia Burian Hanna	44
5-6	Bötkös Benedek	Deák Ferenc Gyak. Ált. Isk. és Gimn. Pécs	Lovas Zoltán	43
5-6	Horváth Csongor	Álmos Vezér Gimnázium és Ált. Iskola Budapest	Németh Katalin	43
7	Bindics Boldizsár	Jenney János Általános Iskola Szeged	Lavai Károly	42
8	Fraknói Ádám	Jedlik Ányos Gimnázium Budapest	Zsilvölgyi Márta	40
9	Matolcsi Dávid	Kós Károly Általános Iskola Budapest	Gyomláiné Petró Éva	39
10	Kiss Péter	Kövy S. Általános Iskola Nádudvar	Lengyel Lászlóné	38

XLI. verseny 2011–12

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Molnár-Sáska Zoltán	Városligeti Általános Iskola Budapest	Turányi Zsuzsanna Pósa Lajos	55
2-3	Imolay András	Pannónia Általános Iskola Budapest	Nagypál Ildikó	48
2-3	Lakatos Ádám	Áldás utcai Általános Iskola Budapest	Krucski Mária	48
4	Alexy Marcell	Juhász Gyula Általános Iskola Vác	Horváth Gáborné	46
5-7	Kulcsár Gergő	Apáczai Csere János Gimnázium Nyíregyháza	Dr. Gát Györgyné	45
5-7	Szakály Marcell	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Jakucs Erika	45
5-7	Eszter Ákos Endre	Felsővárosi Általános Iskola Kiskunhalas	Juhászné Czinkóczi Éva	45
8	Kovács Ádám	Hajós Alfréd Kéttan. Nyelv. Ált. Isk. Budapest	Köviné Nagy Ildikó	44
9-10	Bursics Balázs	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Paróczay József	43
9-10	Dobák Dávid	Bányai Júlia Gimnázium Kecskemét	Reiterné Makra Zsuzsa Brenyó Mihály	43

XLI. verseny 2011–12

	Név	Iskola	Tanár(ok)	Pont
1	Gál Hanna	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium Szeged	Schultz János Mike János	63
2	Williams Kada	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium Szeged	Schultz János Mike János	62
3	Almási Nóra	Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen	Lakatos Tibor Pósa Lajos Tóth Mariann	62
4	Baran Zsuzsanna	Fazekas Mihály Gimnázium Debrecen	Lakatos Tibor Pósa Lajos Tóth Mariann	61
5	Lajkó Kálmán	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium Szeged	Schultz János Mike János	57
6	Radnai Bálint	Rákóczi telepi Tagiskola Várpalota	Gerstmárné Takács Beatrix	56
7	Tóth Viktor	Kodály Zoltán Közp. Ált. Isk. Kaposvár	Szántainé Erdős Johanna Pósa Lajos	55
8	Szabó Áron	Bolyai J. Gyak. Ált. Isk. és Gimnázium Szombathely	Némethné Békéssy Ildikó	54
9	Kovács Benedek	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Pluhár Gabriella	52
10	Csitári Nóra	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Pluhár Gabriella	50

XLI. verseny 2011–12

	Név	Iskola	Tanárok	Pont
1	Szabó Eszter	Krúdy Gyula Gimnázium Nyíregyháza	Katonáné Cserepes Mária Varga Szilveszter	63
2	Sal Kristóf	Koch Valéria Általános Iskola Pécs	Kamarás Lajos Pósa Lajos Lipták Éva	62
3	Szabó Barnabás	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Táborné Vincze Márta Gyenes Zoltán	61
4-5	Kovács Viktória	Árpád Gimnázium Budapest	Meszlényiné Róka Ágnes Koncz Levente	60
4-5	Zarándy Álmos	Fazekas Mihály Gyakorló Iskola Budapest	Gyenes Zoltán Táborné Vincze Márta	60
6-8	Bodnár Levente	Református Általános Iskola Kecskemét	Nagy Csordásné Pósa Tibor Szécsi Jolán Lajos	59
6-8	Nagy Kartal	Kossuth Lajos Általános Iskola Veszprém	Nagyné Czaun Mariann	59
6-8	Szebellédi Márton	Bányai Júlia Gimnázium Kecskemét	Varga Csordásné Pósa József Szécsi Jolán Lajos	59
9	Nagy Simon	Berzsenyi Dániel Gimnázium Budapest	Sztranyák Attila Dr. Ökördi Péterné	57
10	Németh Flóra	Csány-Szendrey ÁMK Belvárosi Tagisk. Keszthely	Volf József	49